



Nekaj rezultatov v teoriji superalgeber

Maja Fošner
Ajda Fošner

Management



Nekaj rezultatov v teoriji superalgeber

Znanstvene monografije
Fakultete za management Koper

Uredniški odbor

prof. dr. Roberto Biloslavo

prof. dr. Štefan Bojnec

prof. dr. Slavko Dolinšek

doc. dr. Justina Erčulj

izr. prof. dr. Tonči A. Kuzmanić

prof. dr. Zvone Vodovnik

ISSN 1855-0878

Nekaj rezultatov v teoriji superalgeber

Maja Fošner
Ajda Fošner



Nekaj rezultatov v teoriji superalgeber

izr. prof. dr. Maja Fošner

izr. prof. dr. Ajda Fošner

Strokovna recenzenta · izr. prof. dr. Matej Mencinger

in izr. prof. dr. Rok Strašek

Izdala in založila · Univerza na Primorskem,

Fakulteta za management,

Cankarjeva 5, 6104 Koper

Oblikovanje in tehnična

ureditev · Alen Ježovnik

Koper · 2011

ISBN 978-961-266-062-8 (tiskana izdaja)

Naklada · 100 izvodov

ISBN 978-961-266-063-5 (elektronska izdaja)

<http://www.fm-kp.si/zalozba/ISBN/978-961-266-063-5.pdf>

© 2011 Fakulteta za management

Monografija je izšla s finančno podporo

Javne agencije za knjigo Republike Slovenije

CIP – Kataložni zapis o publikaciji

Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

512.55

FOŠNER, Maja

Nekaj rezultatov v teoriji superalgeber / Maja Fošner, Ajda Fošner. – Koper : Fakulteta za management, 2011. – (Znanstvene monografije Fakultete za management Koper, ISSN 1855-0878)

Dostopno tudi na:

<http://www.fm-kp.si/zalozba/ISBN/978-961-266-063-5.pdf>

ISBN 978-961-266-062-8

ISBN 978-961-266-063-5 (pdf)

1. Fošner, Ajda

258344704

Kazalo

Uvod · 7

- 1 Osnovni pojmi · 9
 - 1.1 Algebre · 9
 - 1.2 Superalgebre · 15
 - 1.3 Gradirane algebre · 25
- 2 Razširjeni centroid · 31
 - 2.1 Razširjeni centroid asociativne praalgebre · 31
 - 2.2 Razširjeni centroid asociativne pra-superalgebre · 37
- 3 Jordanske preslikave · 59
 - 3.1 Jordanski superhomomorfizmi · 59
 - 3.2 Jordanski ϵ -homomorfizmi · 62
 - 3.3 Jordanska superodvajanja · 75
 - 3.4 Jordanska ϵ -odvajanja · 98
- 4 Lokalna superodvajanja in lokalna ϵ -odvajanja · 109
 - 4.1 Lokalna superodvajanja · 109
 - 4.2 Lokalna ϵ -odvajanja · 121
- 5 2-lokalna superodvajanja na superalgebri $M_n(\mathbb{C})$ · 135
 - 5.1 2-lokalna superodvajanja na $M_n(\mathbb{C})$ · 137

Literatura · 141

Uvod

Glavni namen monografije je predstaviti nekaj novejših rezultatov na področju superalgeber in gradiranih algeber. Vsebina zajema obravnavo teorije razširjenega centroida asociativnih superalgeber, jordanskih preslikav na asociativnih superalgebrah in gradiranih algebrah, predstavljeni so nekateri rezultati lokalnih superodvajanj na superalgebrah in lokalnih ϵ -odvajanj na gradiranih algebrah ter 2-lokalnih superodvajanj na superalgebri matrik $M_n(\mathbb{C})$. Monografija je razdeljena na pet osnovnih sklopov.

V prvem delu so predstavljeni nekateri osnovni pojmi in primeri iz teorije algeber, jordanskih algeber, superalgeber, jordanskih superalgeber, gradiranih algeber in ϵ -jordanskih algeber.

V drugem poglavju so obravnavane nekatere lastnosti razširjenega centroida asociativnih praalgeber, ki ga je leta 1969 vpeljal Martindale. Koncept razširjenega centroida se je v teoriji asociativnih praalgeber izkazal za zelo koristnega. Zato se ob tem naravno porodi vprašanje o značilnostih razširjenega centroida superalgeber, kar bo vodilna nit drugega poglavja. Izkaže se, da se dajo ključne lastnosti razširjenega centroida asociativne praalgebre posplošiti na asociativne pra-superalgebre. Na primer, osnovni rezultat, da je razširjeni centroid asociativne praalgebre polje, lahko dokažemo za superalgebre: asociativna polpra-superalgebra je pra-superalgebra natanko tedaj, ko so vsi homogeni elementi razširjenega centroida obrnljivi. Predstavili bomo posplošitev Posnerjevega izreka, ki pravi, da kompozitum dveh neničelnih odvajanj na praalgebri ni odvajanje. Prav tako bomo posplošili izrek Brešarja, Martindalea in Miersa o karakterizaciji biodvajanj na praalgebrah in Brešarjev rezultat o aditivnih komutirajočih preslikavah na praalgebrah.

V tretjem poglavju se bomo osredotočili na jordanske preslikave na superalgebrah in gradiranih algebrah. Če vpeljemo v asociativno algebro \mathcal{A} t.i. jordanski produkt $a \circ b = ab + ba$, postane

$\mathcal{A}^+ = (\mathcal{A}, +, \circ)$ jordanska algebra. Že pred približno petdesetimi leti je Herstein obravnaval vprašanje, kakšna je zveza med homomorfizmi (odvajanji) na asociativni algebri \mathcal{A} in homomorfizmi (odvajanji) na algebri \mathcal{A}^+ . Pokazal je, da je vsak homomorfizem $\varphi : \mathcal{B}^+ \rightarrow \mathcal{A}^+$, kjer je \mathcal{B} poljubna asociativna algebra, \mathcal{A} pa asociativna praalgebra, homomorfizem ali antihomomorfizem, ki slika iz algebre \mathcal{B} v algebro \mathcal{A} . Dejansko je ta izrek dokazal za kolobarje s karakteristiko različno od 3. Kasneje je Smiley brez te predpostavke podal enostavnejši dokaz omenjenega rezultata. Herstein je prav tako pokazal, da je vsako odvajanje $D : \mathcal{A}^+ \rightarrow \mathcal{A}^+$, kjer je \mathcal{A} asociativna praalgebra, odvajanje na \mathcal{A} . Ob tem se naravno poraja vprašanje o možnih razširitvah klasičnih Hersteinovih rezultatov na superalgebre ali splošnejše gradirane algebre. S homomorfizmi superalgeber so se ukvarjali Beidar, Brešar in Chebotar. V luči te tematike bomo v tretjem poglavju obravnavali jordanska superodvajanja superalgeber ter predstavili rezultate o jordanskih ϵ -homomorfizmih in jordanskih ϵ -odvajanjih gradiranih algeber.

Kadison, Larson in Sourour so v svojih člankih raziskovali, pod katerimi pogoji je lokalno odvajanje dejansko odvajanje. Nedavno je Brešar v svojem delu obravnaval odvajanja na določenih kolobarjih, ki vsebujejo necentralne idempotente. Kot posledico je predstavil nekaj novih rezultatov o lokalnih odvajanjih. V luči te raziskave je namen četrtega poglavja predstaviti lokalna superodvajanja in lokalna ϵ -odvajanja.

Zadnje poglavje je namenjeno obravnavi 2-lokalnih superodvajanj. Dokazan je izrek, da je vsako 2-lokalno superodvajanje na asociativni superalgebri $M_n(\mathbb{C})$ superodvajanje.

1 Osnovni pojmi

Namen tega poglavja je predstaviti osnovne pojme in primere na področju teorije nekomutativnih algeber, jordanških algeber, superalgeber, jordanških superalgeber, gradiranih algeber in ϵ -jordanških algeber.

Vsebina poglavja je razdeljena na tri osnovne sklope. Preden se bomo podali na področje teorije superalgeber in teorije gradiranih algeber, bomo v prvem delu za osvežitev brez podrobnosti in nekaterih dokazov podali nekatere osnovne definicije in nekatere rezultate s področja teorije algeber.

1.1 Algebre

V nadaljevanju bomo pod besedo algebra razumeli, da gre za asociativno algebro nad komutativnim enotskim kolobarjem Φ , ki ne vsebuje nujno enote in ni nujno komutativna. Na začetku zapišimo nekaj osnovnih oznak, ki jih bomo uporabljali.

Naj bo \mathcal{A} algebra. Elementu $[x, y] = xy - yx$ pravimo *komutator* elementov $x, y \in \mathcal{A}$, produkt $x \circ y = xy + yx$ pa imenujemo *jordanski produkt* elementov $x, y \in \mathcal{A}$. *Center* algebre \mathcal{A} bomo označili s simbolom $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, torej je $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid [x, y] = 0 \text{ za vsak } y \in \mathcal{A}\}$. Če sta \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 aditivni podgrupi algebre \mathcal{A} , bomo s simbolom $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ označili Φ -podmodul algebre \mathcal{A} generiran z elementi xy , $x \in \mathcal{T}_1$, $y \in \mathcal{T}_2$. Podobno, pod oznako $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ bomo imeli v mislih Φ -podmodul algebre \mathcal{A} generiran z elementi $[x, y]$, $x \in \mathcal{T}_1$, $y \in \mathcal{T}_2$. Analogno definiramo $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$, $[[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2], \mathcal{T}_3]$ itd.

Algebra \mathcal{A} je *praalgebra*, če je produkt dveh njenih neničelnih idealov vselej neničeln. Izkáže se, da je \mathcal{A} praalgebra natanko tedaj, ko iz $aAb = 0$, kjer sta $a, b \in \mathcal{A}$, sledi $a = 0$ ali $b = 0$. Algebra z netrivialnim množenjem, ki ne vsebuje pravih neničelnih idealov je *enostavna algebra*. Vsaka enostavna algebra je praalgebra.

Ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} je *nilpotenten*, če je $\mathcal{I}^n = 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Algebra \mathcal{A} je *polpraalgebra*, če ne vsebuje neničelnih nilpotentnih idealov. To je ekvivalentno temu, da iz $a\mathcal{A}a = 0$, kjer je $a \in \mathcal{A}$, sledi $a = 0$. Vsaka praalgebra je seveda tudi polpraalgebra. Obratno ni nujno res. Namreč, če je \mathcal{A} neničelna praalgebra, potem je $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ polpraalgebra, ki pa ni praalgebra.

Ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} je *bistven ideal*, če je presek z vsakim neničelnim idealom algebre \mathcal{A} neničeln. Če je \mathcal{A} praalgebra, je vsak njegov neničelni ideal bistven. Podobno je ideal $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ bistven ideal algebre $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ natanko tedaj, ko sta \mathcal{I} in \mathcal{J} neničelna ideala algebre \mathcal{A} .

Naj bo \mathcal{T} neprazna množica algebre \mathcal{A} . *Levi anihilator* $Ann_l(\mathcal{T})$ in *desni anihilator* $Ann_r(\mathcal{T})$ množice \mathcal{T} sta množici

$$Ann_l(\mathcal{T}) = \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{T} = 0\} \quad \text{in} \quad Ann_r(\mathcal{T}) = \{x \in \mathcal{A} \mid \mathcal{T}x = 0\}.$$

V primeru, ko sta levi in desni anihilator \mathcal{T} enaka, bomo pisali $Ann(\mathcal{T})$. Levi (desni) ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} je levi (desni) anihilator, če obstaja taka podmnožica $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$, da je $\mathcal{I} = Ann_l(\mathcal{T})$ ($Ann_r(\mathcal{T})$). Neposredno iz definicije sledi, da je $Ann_l(\mathcal{T})$ levi ideal algebre \mathcal{A} . Če je \mathcal{T} levi ideal, je $Ann_l(\mathcal{T})$ ideal algebre \mathcal{A} . Podobne lastnosti ima desni anihilator. Če je \mathcal{I} ideal polpraalgebre, je ekvivalentno: (i) $Ann_l(\mathcal{I}) = 0$, (ii) $Ann_r(\mathcal{I}) = 0$, (iii) \mathcal{I} je bistven ideal.

V nadaljevanju bomo zapisali definicijo Martindaleove algebre kvocientov. Literatura, po kateri je obravnavana tematika povzeta [2], je pisana v jeziku teorije kolobarjev. Kolobar lahko obravnavamo kot algebro nad kolobarjem celih števil in v tem smislu na pojem algebre gledamo kot na posplošitev pojma kolobarja. Zato bomo vseskozi obravnavali le algebre.

Definicija 1.1. Naj bo \mathcal{A} polpraalgebra. Algebra $Q_r = Q_r(\mathcal{A})$ se imenuje *desna Martindaleova algebra kvocientov algebre \mathcal{A}* , če zadošča pogojem

- (i) \mathcal{A} je podalgebra Q_r ;
- (ii) za vsak $q \in Q_r$ obstaja tak bistven ideal \mathcal{I} , da je $q\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$;
- (iii) če je $0 \neq q \in Q_r$, je $q\mathcal{I} \neq 0$ za vsak bistveni ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} ;
- (iv) če je \mathcal{I} bistven ideal algebre \mathcal{A} in je $f : \mathcal{I}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{A}}$ modulski homomorfizem, potem obstaja tak $q \in Q_r$, da je $f(u) = qu$ za vsak $u \in \mathcal{I}$.

Analogno definiramo levo Martindaleovo algebro kvocientov $Q_l = Q_l(\mathcal{A})$. Če je \mathcal{A} polpraalgebra, potem algebra $Q_r(\mathcal{A})$ ($Q_l(\mathcal{A})$) obstaja in je do izomorfizma natančno enolično določena. Algebri Q_r in Q_l sta prav tako polpraalgebri.

Definicija 1.2. Naj bo \mathcal{A} polpraalgebra. Algebra $Q_s = Q_s(\mathcal{A})$ se imenuje simetrična Martindaleova algebra kvocientov algebre \mathcal{A} , če zadošča pogojem

- (i) \mathcal{A} je podalgebra Q_s ;
- (ii) za vsak $q \in Q_s$ obstaja tak bistven ideal \mathcal{I} , da je $q\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ in $\mathcal{I}q \subseteq \mathcal{A}$;
- (iii) če je $0 \neq q \in Q_s$, je $q\mathcal{I} \neq 0$ in $\mathcal{I}q \neq 0$ za vsak bistveni ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} ;
- (iv) če je \mathcal{I} bistven ideal algebre \mathcal{A} in sta $f : \mathcal{I}_A \rightarrow \mathcal{A}_A$ in $g : {}_A\mathcal{I} \rightarrow {}_A\mathcal{A}$ taka modulska homomorfizma, da je $uf(v) = g(u)v$ za vsaka $u, v \in \mathcal{I}$, potem obstaja tak $q \in Q_s$, da je $f(v) = qv$ in $g(u) = uq$ za vse $u, v \in \mathcal{I}$.

Če je \mathcal{A} polpraalgebra, potem algebra Q_s obstaja in je do izomorfizma natančno enolično določena. Še več, algebri $\{q \in Q_r \mid$ obstaja tak bistven ideal \mathcal{I} , da je $\mathcal{I}q \subseteq \mathcal{A}\} \cong \{q \in Q_l \mid$ obstaja tak bistven ideal \mathcal{I} , da je $\mathcal{I}q \subseteq \mathcal{A}\}$ sta simetrični Martindaleovi algebri kvocientov. Če je \mathcal{A} enostavna algebra z enoto, potem je $\mathcal{A} = Q_l = Q_r = Q_s$.

Algebro $\mathcal{Z}(Q_r)$ imenujemo *Martindaleov razširjeni centroid* algebre \mathcal{A} in jo označimo s simbolom $C = C(\mathcal{A})$. Če je \mathcal{A} polpraalgebra, je $\mathcal{Z}(Q_s) = \mathcal{Z}(Q_r) = \{q \in Q_r \mid [q, \mathcal{A}] = 0\}$.

Definicija 1.3. Centralno zaprtje algebre \mathcal{A} je algebra

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{ \sum a_i \lambda_i \mid \lambda_i \in C, a_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Algebra \mathcal{A} je centralno zaprta, če je enaka svojemu centralnemu zaprtju.

V nadaljevanju bomo govorili o algebrah z involucijo $*$. Tako naj bo odslej \mathcal{A} algebra nad komutativnim kolobarjem Φ z enoto 1 in elementom $\frac{1}{2}$. To pomeni, da je element $1 + 1$ obrnljiv.

Definicija 1.4. Naj bo \mathcal{A} asociativna algebra. Φ -modulski homomorfizem $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ je involucija, če je za vsaka $a, b \in \mathcal{A}$

- (i) $(a^*)^* = a$;
(ii) $(ab)^* = b^*a^*$.

Množica *simetričnih elementov* algebre \mathcal{A} je množica takih elementov $a \in \mathcal{A}$, da je $a^* = a$. Označimo jo s simbolom $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A}, *) = \{a \in \mathcal{A} \mid a^* = a\}$. Množica *poševno simetričnih elementov* algebre \mathcal{A} je množica elementov $a \in \mathcal{A}$ z lastnostjo $a^* = -a$. Označimo jo s simbolom $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A}, *) = \{a \in \mathcal{A} \mid a^* = -a\}$. Vidimo, da je $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{K}$, saj lahko vsak element $x \in \mathcal{A}$ zapišemo kot $x = \frac{1}{2}(x + x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)$, $x + x^* \in \mathcal{S}$ in $x - x^* \in \mathcal{K}$.

Zapišimo nekaj primerov involucij:

- (a) Naj bo \mathcal{A} algebra kompleksnih števil. Potem je konjugiranje na \mathcal{A} involucija.
(b) Naj bo \mathcal{A} algebra realnih kvaternionov. Standardna involucija na \mathcal{A} je podana s predpisom $(a+bi+cj+dk)^* = a-bi-cj-dk$, $a, b, c, d \in \mathcal{A}$.
(c) Naj bo F polje in $\mathcal{A} = M_n(F)$ algebra $n \times n$ matrik nad F . Standardna involucija na \mathcal{A} je transponiranje.
(d) Naj bo F polje in $\mathcal{A} = M_{2m}(F)$. Simplektična involucija na \mathcal{A} je definirana s predpisom

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix}, A, B, C, D \in M_m(F),$$

pri čemer je T oznaka za običajno transponiranje matrik.

- (e) Naj bo \mathbb{C} kolobar kompleksnih števil in $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$. Potem je hermitiranje (t.j. transponiranje in konjugiranje) na \mathcal{A} involucija.
(f) Naj bo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebra omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru. Običajna involucija na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je adjungiranje operatorjev na Hilbertovem prostoru.
(g) Naj bo A poljubna algebra in naj bo $\mathcal{A} = A \oplus A^{op}$ (A^{op} je nasprotna algebra nad Φ , ki je kot Φ -modul enaka A , množenje pa je definirano s predpisom $a \cdot b = ba$, $a, b \in A$). Standardna involucija na \mathcal{A} je podana s predpisom $(a, b)^* = (b, a)$, $(a, b) \in \mathcal{A}$.

- (h) Naj bo F polje in $\mathcal{A} = F\langle x, y \rangle$ prosta algebra z enoto in dvema nekomutativnima spremenljivkama x in y . Algebro \mathcal{A} opremimo s t.i. standardno involucijo $x^* = x$, $y^* = y$ in $\lambda^* = \lambda$ za vsak $\lambda \in F$. S tem pogojem je involucija $*$ enolično določena (npr. $(\lambda xy + \mu y^2 xy)^* = \lambda yx + \mu yxy^2$).

Jordanske algebre

V tem razdelku bomo na kratko povzeli najosnovnejše pojme v zvezi z jordanškimi algebrami. Te algebre so neasociativne, kar pomeni, da asociativnosti ne privzemamo (seveda pa to ne pomeni, da jo nujno izključujemo). Pojme, kot so ideal, kvocientna algebra, praalgebra, polpraalgebra, homomorfizem in podobno vpeljemo za neasociativne algebre enako kot za asociativne.

Jordanske algebre so se pojavile predvsem v času, ko je teorija asociativnih algeber v glavnem že dobila podobo, kot jo poznamo danes. Pojem jordanških algeber so vpeljali Jordan, von Neumann in Wigner leta 1934. Adrian Albert je bil eden izmed prvih algebraikov, ki je velik del svojega dela v letih med 1934 in 1960 posvetil jordanškim algebram. Naslednji pomembnejši jordanški algebraik je bil Nathan Jacobson. Kasneje, po letu 1970 sta pomembna predstavnika Kevin McCrimmon in Otmar Loos. Na tem področju je veliko prispel tudi Efim Zelmanov.

Definicija 1.5. *Neasociativna algebra $(\mathcal{A}, +, \circ)$ je jordanška algebra, če za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$ velja:*

- (i) $x \circ y = y \circ x$;
(ii) $(x \circ x) \circ (y \circ x) = ((x \circ x) \circ y) \circ x$.

Namesto $x \circ x$ bomo pisali x^2 . Torej lahko drugo identiteto zapišemo kot

$$x^2 \circ (y \circ x) = (x^2 \circ y) \circ x.$$

V nadaljevanju bomo podali nekaj ključnih primerov jordanških algeber.

Primer 1.6. Naj bo \mathcal{A} asociativna algebra z običajnim produktom xy , $x, y \in \mathcal{A}$. Potem je $(\mathcal{A}, +, \circ)$, kjer je produkt \circ definiran s predpisom

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$, jordanska algebra. Ponavadi jo označujemo s simbolom \mathcal{A}^+ .

Primer 1.7. Množica vseh simetričnih elementov asociativne algebre \mathcal{A} z involucijo je jordanska algebra za produkt \circ . Gre torej za podalgebro jordanske algebre \mathcal{A}^+ .

Primer 1.8. Naj bo V vektorski prostor nad poljem F in naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ simetrična bilinearna forma. Nadalje, naj bo $\mathcal{J} = F \oplus V$ direktna vsota vektorskih prostorov. V \mathcal{J} vpeljimo produkt definiran s predpisom

$$(\alpha, x) \cdot (\beta, y) = (\alpha\beta + \langle x, y \rangle, \beta x + \alpha y).$$

Potem je \mathcal{J} jordanska algebra nad F .

Primer 1.9. Adrian Albert je odkril, da lahko iz vsakega polja konstruiramo jordansko algebro, ki ima vedno dimenzijo 27 in je ni mogoče dobiti na načine, opisane v prejšnjih primerih. Dokaz, da je Albertova algebra res jordanska algebra, najdemo v [35] in [58]. V ozadju konstrukcije te algebre stojijo oktonioni. Algebro oktonionov bomo označili s simbolom $O(F)$. To je 8-razsežni realni neasociativni obseg. Podrobnosti najdemo npr. v [55].

Albertova algebra je množica vseh matrik oblike

$$\begin{bmatrix} \lambda & x & y \\ \bar{x} & \mu & z \\ \bar{y} & \bar{z} & \nu \end{bmatrix},$$

kjer so $\lambda, \mu, \nu \in F$ in $x, y, z \in O(F)$. Množenje je definirano s predpisom $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, pri čemer ab označuje običajno množenje matrik a in b .

Definicija 1.10. *Jordanska algebra je specialna, če je izomorfna podalgebri algebre \mathcal{A}^+ , kjer je \mathcal{A} asociativna algebra.*

V primerih 1.6, 1.7 in 1.8 so jordanske algebre specialne. Izkaže pa se, da niso vse jordanske algebre specialne. Primer je Albertova algebra, ki je tako imenovana izjemna jordanska algebra. Leta 1983 je Zelmanov [56] dokazal, da so, ob določenih predpostavkah, edini primeri jordanskih algeber zgoraj opisani štirje primeri.

Definicija 1.11. *Aditivna podgrupa \mathcal{B} asociativne algebre \mathcal{A} je jordan-
danska podalgebra algebre \mathcal{A} , če je $b_1 \circ b_2 \in \mathcal{B}$ za vse $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$. Če
je \mathcal{J} taka aditivna podgrupa jordan-
danske podalgebre \mathcal{B} , da je $x \circ b \in \mathcal{J}$
za vsak $x \in \mathcal{J}$, $b \in \mathcal{B}$, potem pravimo, da je \mathcal{J} jordan-
ski ideal podalgebre \mathcal{B} .*

Jordan-
ski ideal asociativne algebre \mathcal{A} je torej ideal jordan-
danske al-
gebre \mathcal{A}^+ . Vsak dvostranski ideal asociativne algebre je jordan-
ski ideal te algebre. Ob tem se zastavlja vprašanje, pod katerimi po-
goji velja obratna zveza. Klasični problem, ki se obravnava že več
kot petdeset let, je opisati jordan-
danske ideale s pomočjo (običajnih)
idealov asociativne algebre. V monografiji ne bomo obravnavali to-
vrstne problematike. Vendar velja zapisati, da je temeljne rezultate
na tem področju prispeval Herstein [32]. V primeru, ko je \mathcal{A} alge-
bra z involucijo, se je med drugim ukvarjal tudi s strukturo jordan-
danske algebre simetričnih elementov. Konkretno, obravnaval je ideale
jordan-
danske algebre $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Eden izmed klasičnih Hersteinovih rezul-
tatov pravi, da je enostavna algebra enostavna tudi kot jordan-
danska algebra, kar pomeni, da ne vsebuje pravih neničelnih jordan-
danskih idealov. Kasneje je bila Hersteinova teorija na različne načine po-
splošena (na primer v [40, 43, 45, 46]). Zapišimo še, da je v članku
[9] predstavljen novi pristop k obravnavi jordan-
danskih idealov asoci-
ativnih algeber in nove posplošitve ter novi dokazi znanih izrekov.
Povzetki nekaterih rezultatov so predstavljeni tudi v [21].

Na koncu tega razdelka namenimo še nekaj vrstic Liejevim struk-
turam v asociativnih algebrah. Naj bo \mathcal{A} asociativna algebra. Če
v algebro \mathcal{A} vpeljemo novi produkt $[x, y] = xy - yx$, $x, y \in \mathcal{A}$, po-
stane \mathcal{A} Liejeva algebra. Aditivna podgrupa \mathcal{L} asociativne algebre
 \mathcal{A} je Liejev ideal, če je $[x, y] \in \mathcal{L}$ za vse $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{A}$. Primer:
vsak dvostranski ideal algebre je Liejev ideal. V primeru, ko je
 \mathcal{A} algebra z involucijo, je množica poševno simetričnih elementov
 \mathcal{K} Liejeva algebra. Več podrobnosti najdemo na primer v člankih
[29, 30, 34, 33, 40].

1.2 Superalgebre

V novejši literaturi je veliko pozornosti posvečeno t.i. gradiranim al-
gebram in še posebej superalgebram. V tem poglavju bomo najprej

predstavili najosnovnejše pojme in primere v zvezi z asociativnimi superalgebrami.

Definicija 1.12. *Superalgebra \mathcal{A} nad komutativnim kolobarjem Φ je \mathbb{Z}_2 -gradirana (neasociativna) algebra. To pomeni, da obstajata taka Φ -podmodula \mathcal{A}_0 in \mathcal{A}_1 algebre \mathcal{A} , da je*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \text{ in } \mathcal{A}_0\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_0, \\ \mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 &\subseteq \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0. \end{aligned}$$

Pravimo, da je \mathcal{A}_0 sodi del, \mathcal{A}_1 pa lihi del superalgebre \mathcal{A} .

Asociativna superalgebra \mathcal{A} je asociativna \mathbb{Z}_2 -gradirana algebra. Pravimo, da je \mathcal{A} trivialna superalgebra, če je $\mathcal{A}_1 = 0$. Elementu $a \in \mathcal{A}_k$, kjer je $k = 0$ ali $k = 1$, pravimo *homogen element stopnje k* in pišemo $|a| = k$.

Naj bosta a in b homogena elementa superalgebre \mathcal{A} . Produktu

$$[a, b]_s = ab - (-1)^{|a||b|}ba$$

pravimo *superkomutator* elementov a in b . Očitno je $[a, b]_s = [a, b]$, če vsaj eden izmed elementov a in b pripada sodemu delu superalgebre. Superalgebra je *superkomutativna*, če je $[a, b]_s = 0$ za vse homogene elemente $a, b \in \mathcal{A}$. V primeru trivialne superalgebre pojem superkomutativnosti sovпада z običajnim pojmom komutativnosti.

Gradiran Φ -podmodul \mathcal{B} asociativne superalgebre \mathcal{A} je tak podmodul algebre \mathcal{A} , da je

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1.$$

V takem primeru pišemo $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0$ ter $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1$. To pomeni, da je $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$. Če je \mathcal{B} gradirana podalgebra \mathcal{A} , je potem \mathcal{B} tudi asociativna superalgebra. *Gradiran ideal* (ali superideal) \mathcal{I} superalgebre \mathcal{A} je ideal algebre \mathcal{A} , ki je hkrati gradiran Φ -podmodul.

Primer 1.13. Naj bo $\mathcal{A} = \Phi\langle X \rangle$ prosta Φ -algebra z enoto na množici simbolov $\{X_1, X_2, \dots\}$ in naj bo \mathcal{I} njen ideal generiran z elementi $X_iX_j + X_jX_i$ ter X_i^2 za vse i, j . Algebro $G = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ imenujemo *Grassmanova algebra*. Naj bo $\overline{X}_i = X_i + \mathcal{I}$. Potem v algebri G velja

$$\begin{aligned} \overline{X}_i\overline{X}_j &= X_iX_j + I = X_iX_j - X_iX_j - X_jX_i + I \\ &= -X_jX_i + I = -\overline{X}_j\overline{X}_i, \\ \overline{X}_i^2 &= X_i^2 + I = 0 \quad \text{za vse } i, j. \end{aligned}$$

Množica $B = \{\overline{X}_{i_1}\overline{X}_{i_2}\dots\overline{X}_{i_n} \mid n = 0, 1, 2, \dots ; i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$ je baza te algebre. Elementom Grassmanove algebre pravimo polinomi. V nadaljevanju bomo namesto simbola \overline{X}_i pisali kar X_i .

Na algebri G je na naraven način definirana \mathbb{Z}_2 -gradacija $G = G_0 \oplus G_1$, pri čemer je sodi del G_0 algebre G linearna lupina elementov $X_{i_1} \dots X_{i_n} \in G_0$, kjer je n sodo število, lihi del pa linearna lupina elementov oblike $X_{i_1} \dots X_{i_n} \in G_1$, kjer je n liho število.

Za superalgebro \mathcal{A} je dana \mathbb{Z}_2 -gradacija ekvivalentna obstoju takega avtomorfizma σ algebre \mathcal{A} , da je $\sigma^2 = id$. V primeru, ko je tak avtomorfizem σ definiran na algebri \mathcal{A} , je \mathbb{Z}_2 -gradacija algebre \mathcal{A} definirana s sodim delom

$$\mathcal{A}_0 = \{x \in \mathcal{A} \mid x^\sigma = x\}$$

in lihim delom

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} \mid x^\sigma = -x\},$$

kjer je $x^\sigma = \sigma(x)$. Namreč, vsak element $x \in \mathcal{A}$ lahko zapišemo kot $x = \frac{1}{2}(x + x^\sigma) + \frac{1}{2}(x - x^\sigma)$, kjer je $x + x^\sigma \in \mathcal{A}_0$ in $x - x^\sigma \in \mathcal{A}_1$. Velja tudi obratno, če je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ superalgebra, definiramo avtomorfizem σ algebre \mathcal{A} s predpisom $x_0^\sigma = x_0$ in $x_1^\sigma = -x_1$, kjer sta $x_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $x_1 \in \mathcal{A}_1$.

Podmodul \mathcal{B} superalgebre \mathcal{A} je gradiran natanko tedaj, ko je $\mathcal{B}^\sigma = \mathcal{B}$. Center $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ superalgebre \mathcal{A} naj bo običajni center algebre \mathcal{A} . Ker avtomorfizem ohranja center $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, je center $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ gradiran. Torej je $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}(\mathcal{A})_0 \oplus \mathcal{Z}(\mathcal{A})_1$.

V nadaljevanju zapišimo nekaž primerov asociativnih superalgeber.

Primer 1.14. Naj bo \mathcal{A} algebra in naj bo $c \in \mathcal{A}$ obrnljiv element. Nadalje, naj bo σ avtomorfizem algebre \mathcal{A} definiran s predpisom $\sigma(x) = cxc^{-1}$, $x \in \mathcal{A}$. Hitro lahko preverimo, da je $\sigma^2 = id$ natanko tedaj, ko je $c^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Torej je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ superalgebra, pri čemer je sodi del

$$\mathcal{A}_0 = \{x \in \mathcal{A} \mid xc = cx\}$$

in lihi del

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} \mid xc = -cx\}.$$

Poglejmo si primer, ko je $\mathcal{A} = M_{r+s}(\Phi)$, $r, s \in \mathbb{N}$ (algebra $(r+s) \times (r+s)$ matrik nad Φ). Za element c lahko izberemo matriko oblike

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix},$$

kjer je I_p identična matrika algebre $M_p(\Phi)$. Potem je

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} M_r(\Phi) & 0 \\ 0 & M_s(\Phi) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & M_{r,s}(\Phi) \\ M_{s,r}(\Phi) & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemer $M_{r,s}(\Phi)$ označuje množico matrik velikosti $r \times s$. Ta algebra je asociativna superalgebra in jo običajno označujemo s simbolom $M(r|s)$. Če je $r = s$, običajno pišemo $M(r) = M(r|r)$.

Primer 1.15. Naj bo A algebra nad Φ in naj bo $\mathcal{A} = A \times A$. Nadalje, naj bo na algebi \mathcal{A} definiran avtomorfizem σ s predpisom $\sigma(a, b) = (b, a)$, $a, b \in A$. Potem je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, pri čemer je sodi del

$$\mathcal{A}_0 = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

in lihi del

$$\mathcal{A}_1 = \{(b, -b) \mid b \in A\}.$$

Izkaže se, da je $\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{bmatrix} C & D \\ D & C \end{bmatrix} \mid C, D \in A \right\}$,

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \mid C \in A \right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{bmatrix} \mid D \in A \right\}.$$

V tem primeru pravimo, da je superalgebra \mathcal{A} porojena z avtomorfizmom zamenjave. Če je $A = M_n(\Phi)$, označimo superalgebro \mathcal{A} s simbolom $Q(n)$.

Primer 1.16. Naj bo $\mathcal{A} = Q(\alpha, \beta)$ 4-dimenzionalna algebra nad poljem Φ z bazo $\{1, uv, u, v\}$ in naj bo množenje definirano s predpisom $u^2 = \alpha \in \Phi$, $v^2 = \beta \in \Phi$, $uv = -vu$. V posebnem primeru je \mathcal{A} algebra kvaternionov nad \mathbb{R} . Označimo $\mathcal{A}_0 = \Phi 1 + \Phi uv$ in $\mathcal{A}_1 = \Phi u + \Phi v$. Potem je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ asociativna superalgebra, ki jo imenujemo superalgebra kvaternionov.

Superalgebra \mathcal{A} je *enostavna*, če nima pravih neničelnih gradiranih idealov. Ob tem velja omeniti, da to še ne pomeni, da je \mathcal{A} enostavna tudi kot algebra. Če je produkt poljubnih dveh neničelnih gradiranih idealov superalgebre \mathcal{A} neničeln, je \mathcal{A} *pra-superalgebra*. Superalgebra \mathcal{A} je *polpra-superalgebra*, če ne vsebuje neničelnih nilpotentnih gradiranih idealov.

Spomnimo se, da lahko karakteriziramo praalgebro \mathcal{A} kot algebro, kjer iz enakosti $aAb = 0$, $a, b \in \mathcal{A}$, sledi, da je $a = 0$ ali $b = 0$. To je ekvivalentno temu, da je produkt dveh neničelnih idealov algebre \mathcal{A} neničeln. Analogni rezultat velja tudi za superalgebre.

Lema 1.17. *Asociativna superalgebra \mathcal{A} je pra-superalgebra natančno tedaj, ko iz enakosti $aAb = 0$, kjer sta $a, b \in \mathcal{A}$ taka, da je vsaj eden homogen, sledi $a = 0$ ali $b = 0$.*

Dokaz. Predpostavimo, da iz enakosti $aAb = 0$, kjer je vsaj eden izmed elementov a in b algebre \mathcal{A} homogen, sledi $a = 0$ ali $b = 0$. Pokažimo, da je v tem primeru \mathcal{A} pra-superalgebra. Naj bosta \mathcal{I} in \mathcal{J} neničelna gradirana ideala superalgebre \mathcal{A} . Potem obstaja neničelni element $a \in \mathcal{I}$ in neničelni homogeni element $b \in \mathcal{J}$. Glede na predpostavko obstaja tak $x \in \mathcal{A}$, da je $0 \neq axb \in \mathcal{I}\mathcal{J}$ in zato $\mathcal{I}\mathcal{J} \neq 0$. S tem smo pokazali želeno.

V nadaljevanju predpostavimo, da je \mathcal{A} pra-superalgebra in naj bo $aAb = 0$, kjer sta $a \in \mathcal{A}$ in $b \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$. Pokazati želimo, da je $a = 0$ ali $b = 0$. Pišimo $a = a_0 + a_1$, $a_0 \in \mathcal{A}_0$ in $a_1 \in \mathcal{A}_1$. Hitro vidimo, da iz predpostavke $aAb = 0$ skupaj z lastnostjo $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1 = 0$ sledi $a_0Ab = a_1Ab = 0$. Naj bodo $\mathcal{I} = \mathcal{A}a_0\mathcal{A}$, $\mathcal{J} = \mathcal{A}a_1\mathcal{A}$ in $\mathcal{K} = \mathcal{A}b\mathcal{A}$. Vidimo, da so \mathcal{I} , \mathcal{J} ter \mathcal{K} gradirani ideali superalgebre \mathcal{A} . Potem je $\mathcal{I}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}a_0\mathcal{A}b\mathcal{A} = 0$ in zato $\mathcal{I}\mathcal{K} = 0$. Podobno $\mathcal{J}\mathcal{K} = 0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, sledi $\mathcal{I} = 0$, $\mathcal{J} = 0$ ali $\mathcal{K} = 0$. Denimo, da $\mathcal{K} \neq 0$. Potem je $\mathcal{I} = \mathcal{J} = 0$, torej $\mathcal{A}a_0\mathcal{A} = \mathcal{A}a_1\mathcal{A} = 0$. S simbolom (a_k) , $k = 0, 1$, označimo najmanjši gradiran ideal superalgebre \mathcal{A} generiran z elementom a_k . Potem je $\mathcal{A}(a_k)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}a_k\mathcal{A} = 0$. Iz tega sledi, da je $(a_k) = 0$ in zato $a_k = 0$. Torej je $a = 0$. Podobno bi pokazali, če bi predpostavili, da je $\mathcal{K} = 0$. \square

Naj bo \mathcal{A} pra-superalgebra. Ob tem se zastavi vprašanje ali sta potem tudi algeabri \mathcal{A} in \mathcal{A}_0 praalgeabri. Izkaže se, da odgovor na zastavljeno vprašanje ni vedno pritrdilen. To dokazujeta naslednja dva primera.

Primer 1.18. Naj bo A praalgebra nad Φ in naj bo $\mathcal{A} = A \times A$ z gradacijo kot v primeru 1.15. Ta algebra je pra-superalgebra (produkt poljubnih dveh neničelnih gradiranih idealov je neničeln), ki pa očitno ni praalgebra, saj je $(0 \times A)(A \times 0) = 0$.

Primer 1.19. Superalgebra $M(r|s)$ je pra-superalgebra. Množici

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid C \in M_r(\Phi) \right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{J} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \mid D \in M_s(\Phi) \right\}$$

sta neničelna ideala algebre $M(r|s)_0$, katerih produkt je nič. Torej algebra $M(r|s)_0$ ni praalgebra.

Dokaza naslednjih dveh rezultatov, ki sta odgovor na prej zastavljeno vprašanje o povezavi med pra-superalgebro (oziroma polpra-superalgebro) \mathcal{A} in praalgebrama (oziroma polpraalgebrama) \mathcal{A} ter \mathcal{A}_0 , najdemo v članku [45].

Lema 1.20. *Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra. Potem sta \mathcal{A} in \mathcal{A}_0 polpraalgeбри.*

Lema 1.21. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra. Potem je bodisi \mathcal{A} praalgebra bodisi \mathcal{A}_0 praalgebra.*

V nadaljevanju bomo podali nekaj elementarnih lastnosti asociativnih pra-superalgeber, ki jih bomo v naslednjih poglavjih potrebovali.

Lema 1.22. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra.*

- (i) *Naj bo $a \in \mathcal{A}$ tak, da je $a\mathcal{A}_1 = 0$ (ali $\mathcal{A}_1a = 0$). Potem je $a = 0$ ali pa je \mathcal{A} trivialna superalgebra.*
- (ii) *Naj bo $a_1\mathcal{A}_1a_1 = 0$, kjer je $a_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je $a_1 = 0$.*
- (iii) *Naj bosta $a_0 \in \mathcal{A}_0$ in $a_1 \in \mathcal{A}_1$ taka, da je $a_0\mathcal{A}_ka_1 = a_1\mathcal{A}_ka_0 = 0$, kjer je $k = 0$ ali $k = 1$. Potem je $a_0 = 0$ ali $a_1 = 0$.*
- (iv) *Naj bosta $a \in \mathcal{A}$ in $a_1 \in \mathcal{A}_1$ taka, da je $a_1\mathcal{A}_ka = 0$ (ali $a\mathcal{A}_ka_1 = 0$), kjer je $k = 0$ ali $k = 1$. Potem je $a_1\mathcal{A}_0a_1 = 0$ ali $a = 0$.*
- (v) *Naj bosta $a \in \mathcal{A}$ in $a_0 \in \mathcal{A}_0$ taka, da je $a_0\mathcal{A}_ka = 0$ (ali $a\mathcal{A}_ka_0 = 0$), kjer je $k = 0$ ali $k = 1$. Potem je $a_0\mathcal{A}_1a_0 = 0$ ali $a = 0$.*
- (vi) *Naj bosta $a_0 \in \mathcal{A}_0$ in $a_1 \in \mathcal{A}_1$ taka, da je $a_0x_1a_1 = a_1x_1a_0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je $a_0xa_1 = a_1xa_0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.*

- (vii) Naj bo $[x_0, y_1] = 0$ za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je bodisi \mathcal{A} komutativna (kot algebra) bodisi je trivialna superalgebra.
- (viii) Superalgebra \mathcal{A} je superkomutativna natanko tedaj, ko je \mathcal{A} komutativna (kot algebra) in je trivialna superalgebra.

Dokaz.

- (i) Naj bo $a\mathcal{A}_1 = 0$. Ker je $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$, takoj sledi, da je $a\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 = 0$. Potem je $a\mathcal{A}\mathcal{A}_1 = 0$. Iz tega sledi, da je $a = 0$ ali $\mathcal{A}_1 = 0$, saj je \mathcal{A} pra-superalgebra. Na podoben način pokažemo, da iz enakosti $\mathcal{A}_1a = 0$ sledi $a = 0$ ali pa je \mathcal{A} trivialna superalgebra.
- (ii) Ni težko videti, da je $a_1\mathcal{A}a_1\mathcal{A}a_1 \subseteq a_1\mathcal{A}a_1\mathcal{A}_1a_1 + a_1\mathcal{A}_1a_1\mathcal{A}a_1 + a_1\mathcal{A}_1a_1$ za vse $a_1 \in \mathcal{A}_1$. Ker je po predpostavki $a_1\mathcal{A}_1a_1 = 0$, sledi enakost $a_1\mathcal{A}a_1\mathcal{A}a_1 = 0$. Ker je \mathcal{A} polpraalgebra, je $a_1 = 0$.
- (iii) Naj bo $a_0\mathcal{A}_0a_1 = a_1\mathcal{A}_0a_0 = 0$. Potem je $(a_0\mathcal{A}_1a_1)\mathcal{A}_0(a_0\mathcal{A}_1a_1) = 0$. Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, sledi $a_0\mathcal{A}_1a_1 = 0$. Upoštevajmo, da je po predpostavki $a_0\mathcal{A}_0a_1 = 0$, kar nas pripelje do enakosti $a_0\mathcal{A}a_1 = 0$. Iz tega sledi, da je $a_0 = 0$ ali $a_1 = 0$, pri čemer ponovno upoštevamo predpostavko, da je \mathcal{A} pra-superalgebra. Naj bo sedaj $a_0\mathcal{A}_1a_1 = a_1\mathcal{A}_1a_0 = 0$. Potem je $(a_0\mathcal{A}_0a_1)\mathcal{A}_1(a_0\mathcal{A}_0a_1) = 0$. Glede na že pokazano trditev (ii) sledi, da je $a_0\mathcal{A}_0a_1 = 0$. Ker je po predpostavki $a_0\mathcal{A}_1a_1 = 0$, je $a_0\mathcal{A}a_1 = 0$. Ta enakost nas vodo do želenega rezultata, saj je \mathcal{A} pra-superalgebra.
- (iv) Obravnavajmo primer, ko je $a_1\mathcal{A}_0a = 0$. Potem je $a_1x_0a_1y_0a = 0$ za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$ in prav tako $a_1x_0a_1x_1a = 0$ za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0, x_1 \in \mathcal{A}_1$. Pri tem upoštevamo, da je $x_0a_1x_1 \in \mathcal{A}_0$. Če združimo obe enakosti, sledi $a_1x_0a_1\mathcal{A}a = 0$ za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, je $a_1\mathcal{A}_0a_1 = 0$ ali $a = 0$. Naj bo sedaj $a_1\mathcal{A}_1a = 0$. Potem je tudi $a_1x_0a_1\mathcal{A}_1a = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Po drugi strani opazimo, da je $a_1x_0a_1\mathcal{A}_0a \subseteq a_1\mathcal{A}_1a = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Iz pravkar dobljenih enakosti sledi $a_1x_0a_1\mathcal{A}a = 0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, je $a_1\mathcal{A}_0a_1 = 0$ ali $a = 0$. Ostale primere obravnavamo na podoben način.
- (v) Obravnavali bomo samo primer, ko je $a_0\mathcal{A}_0a = 0$. Ostale primere obravnavamo na podoben način. Torej, glede na predpostavko je $a_0x_1a_0x_0a = 0$ za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0, x_1 \in \mathcal{A}_1$ in prav tako je $a_0x_1a_0y_1a = 0$ za vse $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Iz tega sledi

$a_0x_1a_0\mathcal{A}a = 0$ za vse $x_1 \in \mathcal{A}$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, je $a_0\mathcal{A}_1a_0 = 0$ ali $a = 0$.

- (vi) Hitro vidimo, da je $a_0(x_1a_0x_0)a_1 = (a_1x_1a_0)x_0a_0 = a_0x_1a_1x_0a_0$ za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$. To pomeni, da je $a_0\mathcal{A}_1(a_0x_0a_1 - a_1x_0a_0) = 0$. Na podoben način opazimo, da je $a_0x_0(a_1x_1a_0) = a_0(x_0a_0x_1)a_1 = a_1x_0a_0x_1a_0$ za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Torej je $(a_0x_0a_1 - a_1x_0a_0)\mathcal{A}_1a_0 = 0$. Glede na že pokazano trditev (iii) sledi, da je $a_0 = 0$ ali $a_0x_0a_1 = a_1x_0a_0$ za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0$. V obeh primerih je $a_0xa_1 = a_1xa_0$ za vse $x \in \mathcal{A}$.
- (vii) Ni težko videti, da je $0 = [x_0, y_0z_1] = [x_0, y_0]z_1 + y_0[x_0, z_1] = [x_0, y_0]z_1$ za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, $z_1 \in \mathcal{A}_1$. Glede na (i) sledi, da je bodisi $\mathcal{A}_1 = 0$ bodisi $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0$. Predpostavimo, da velja slednje. Pokažimo, da je potem tudi $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0$. Ni težko preveriti, da je $0 = [x_1y_1, x_1] = x_1[y_1, x_1]$ za vse $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$ in podobno $[y_1, x_1]x_1 = 0$. Ker je $[x_1, \mathcal{A}_0] = 0$, sledi $x_1\mathcal{A}_0[y_1, x_1] = [y_1, x_1]\mathcal{A}_0x_1 = 0$. Po trditvi (iii) je $[y_1, x_1] = 0$ za vsaka $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$.
- (viii) Naj bo \mathcal{A} superkomutativna algebra. Potem je $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1] = 0$. Glede na rezultat (vii) sledi, da je v obeh primerih \mathcal{A} komutativna algebra. Torej je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]_s = 0$, iz česar sledi, da je $\mathcal{A}_1^2 = 0$. Glede na trditev (i) sledi, da je $\mathcal{A}_1 = 0$. Obratna implikacija je trivialna. \square

*Superalgebre s superinvolicijo **

Analogno kot smo predstavili definicijo algeber z involucijo, bomo predstavili definicijo superalgeber s superinvolicijo.

Definicija 1.23. *Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra. Potem je Φ -modulski homomorfizem $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ superinvolicija, če je $(\mathcal{A}_0)^* \subseteq \mathcal{A}_0$, $(\mathcal{A}_1)^* \subseteq \mathcal{A}_1$ in za vsaka homogena elementa $a, b \in \mathcal{A}$ velja:*

- (i) $(a^*)^* = a$;
(ii) $(ab)^* = (-1)^{|a||b|}b^*a^*$.

V primeru trivialne superalgebre pojem superinvolicije sovпада s pojmom involucije.

Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra nad Φ . Superalgebra \mathcal{A}^{op} je nasprotna superalgebra nad Φ , ki je kot Φ -modul enaka \mathcal{A} , množenje

pa je definirano s predpisom $a \cdot b = (-1)^{|b||a|}ba$, $a, b \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$. Superinvolucija $*$ je izomorfizem asociativne superalgebre \mathcal{A} v \mathcal{A}^{op} . Če je \mathcal{A} superalgebra, je na superalgebri $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{op} = (\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_0^{op}) \oplus (\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_1^{op})$ definirana superinvolucija s predpisom $(a, b)^* = (b, a)$ in jo imenujemo *superinvolucija zamenjave*.

Pojma simetričnih elementov in poševno simetričnih elementov superalgebre \mathcal{A} s superinvolucijo $*$ vpeljemo na enak način kot v primeru asociativnih algeber z involucijo, torej $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a^* = a\}$ in $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a^* = -a\}$. Seveda sta \mathcal{S} in \mathcal{K} gradirana podmodula \mathcal{A} in velja $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{K}$. Zapišimo primer superinvolucije.

Primer 1.24. Na superalgebri $M(r)$ definirajmo superinvolucijo, ki jo imenujemo *transponirana superinvolucija* in jo označimo s trp :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{trp} = \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ C^T & A^T \end{bmatrix},$$

kjer T označuje običajno transponiranje matrik. Naj bo $p : M(r) \rightarrow M(r)$ avtomorfizem definiran s predpisom $p(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, $a_0 \in M(r)_0, a_1 \in M(r)_1$. Potem je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{(trp)p} = \begin{bmatrix} D^T & B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix}.$$

Jordanske superalgebre

Leta 1977 je Kac v članku [37] klasificiral enostavne končno dimenzionalne jordanske superalgebre nad algebraično zaprtim poljem s karakteristiko nič in jih razdelil v devet skupin. Prav tako kot pri jordanskih algebrah, se tudi na tem področju postavi vprašanje strukturnih značilnosti jordanskih superalgeber. Med drugim se naravno porodi vprašanje o možnih razširitvah Hersteinove teorije o jordanskih preslikavah na področje superalgeber. Podrobneje se bomo s tovrstnimi problemi ukvarjali v poglavju o jordanskih preslikavah.

Definicija 1.25. *Neasociativna superalgebra $(\mathcal{A}, +, \circ_s)$ je jordanska superalgebra, če velja:*

- (i) $x \circ_s y = (-1)^{|x||y|} y \circ_s x$;
(ii) $(-1)^{|z||xw|} (x \circ_s y) \circ_s (w \circ_s z) + (-1)^{|y||zw|} (z \circ_s x) \circ_s (w \circ_s y)$
 $+ (-1)^{|x||yw|} (y \circ_s z) \circ_s (w \circ_s x) = (-1)^{|z||xw|} ((x \circ_s y) \circ_s w) \circ_s z$
 $+ (-1)^{|y||zw|} ((z \circ_s x) \circ_s w) \circ_s y + (-1)^{|x||yw|} ((y \circ_s z) \circ_s w) \circ_s x$

za vse homogene elemente $w, x, y, z \in \mathcal{A}$.

V primeru, ko je \mathcal{A} trivialna superalgebra, ta definicija sovпада z običajno definicijo pojma jordanke algebre (uporabimo linearizacijo enakosti $x^2 \circ (y \circ x) - (x^2 \circ y) \circ x = 0$).

Primer 1.26. Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra. V \mathcal{A} vpeljimo produkt \circ_s , ki je definiran s predpisom

$$x \circ_s y = \frac{1}{2}(xy + (-1)^{|x||y|}yx), \quad x, y \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

Tako postane $\mathcal{A}_s^+ = (\mathcal{A}, +, \circ_s)$ jordanška superalgebra.

Primer 1.27. Množica vseh simetričnih elementov asociativne superalgebre \mathcal{A} s superinvolucijo $*$ je jordanška superalgebra za produkt \circ_s .

Zapišimo definicijo jordanškega superideala.

Definicija 1.28. *Gradiran Φ -podmodul \mathcal{J} asociativne superalgebre \mathcal{A} je jordanški superideal, če za poljubna homogene elementa $x \in \mathcal{J}$ in $a \in \mathcal{A}$ velja $x \circ_s a \in \mathcal{J}$.*

Jordanški superideal asociativne superalgebre \mathcal{A} je gradiran ideal jordanške superalgebre \mathcal{A}_s^+ . Vsak gradiran ideal asociativne superalgebre \mathcal{A} je gradiran ideal jordanške superalgebre \mathcal{A}_s^+ . Tako kot v običajnih algebrah, se tudi na tem področju naravno zastavlja vprašanje, kdaj oziroma pod katerimi pogoji velja obratna zveza. Podobno, če je \mathcal{A} asociativna superalgebra s superinvolucijo, kakšne so strukturne značilnosti jordanške algebre simetričnih elementov? Z gradiranimi ideali jordanške superalgebre \mathcal{A}_s^+ sta se ukvarjala Gomez-Ambrosi in Montaner v članku [25].

Na koncu tega razdelka namenimo še par stavkov Liejevim superalgebram. Če v asociativno superalgebro \mathcal{A} vpeljemo produkt $[x, y]_s = xy - (-1)^{|x||y|}yx$, $x, y \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, postane \mathcal{A} *Liejeva superalgebra*. Gradiran Φ -podmodul \mathcal{L} superalgebre \mathcal{A} je *Liejev superideal*, če je $[x, y]_s \in \mathcal{L}$ za vse homogene elemente $x \in \mathcal{L}$ in

$y \in \mathcal{A}$. Očitno je vsak gradiran ideal algebre \mathcal{A} Liejev superideal. V primeru, ko je \mathcal{A} superalgebra s superinvolucijo, množica poševno simetričnih elementov \mathcal{K} tvori Liejevo superalgebro. Več o Liejevih superalgebrah lahko najdemo v člankih [24, 26, 37, 45].

1.3 Gradirane algebre

V tem razdelku bomo predstavili osnovne lastnosti G -gradiranih algeber, pri čemer je G Abelova grupa. Superalgebre so poseben primer G -gradiranih algeber, kjer je $G = \mathbb{Z}_2$. V monografiji se bomo osredotočili predvsem na novejšje rezultate na področju teorije asociativnih superalgeber. Nekatere probleme bomo obravnavali tudi z vidika gradiranih algeber. Zato bomo predstavili rezultate tako na področju teorije superalgeber kot tudi na področju gradiranih algeber. Ko bomo obravnavali G -gradirane algebre, bomo zaradi enostavnosti privzeli, da je Φ polje. V primeru superalgeber ta predpostavka ni potrebna.

Definicija 1.29. *Asociativna algebra \mathcal{A} je G -gradirana asociativna algebra, če obstajajo taki podprostori \mathcal{A}_g , $g \in G$, algebre \mathcal{A} , da je*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g \text{ in } \mathcal{A}_g \mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{gh}$$

za vse $g, h \in G$.

Element $a \in \mathcal{A}$ je *homogen*, če je $a \in \mathcal{A}_g$ za nek $g \in G$. Množico vseh homogenih elementov algebre \mathcal{A} bomo označili s simbolom $\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Torej je

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \bigcup_{g \in G} \mathcal{A}_g.$$

Podprostor \mathcal{B} algebre \mathcal{A} je *gradiran*, če je $\mathcal{B} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_g$. Ideal generiran z \mathcal{B} je gradiran, če je \mathcal{B} gradiran podprostor. Algebra \mathcal{A} je *gradirana polpraalgebra*, če ne vsebuje neničelnih nilpotentnih gradiranih idealov. Algebra \mathcal{A} je *gradirana praalgebra*, če je produkt dveh neničelnih gradiranih idealov neničeln.

Lema 1.30. *Gradirana algebra \mathcal{A} je gradirana praalgebra natanko tedaj, ko iz $aAb = 0$, kjer sta $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, sledi $a = 0$ ali $b = 0$.*

Dokaz. Predpostavimo, da iz $aAb = 0$, kjer sta $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, sledi $a = 0$ ali $b = 0$. Nadalje, naj bosta \mathcal{I} in \mathcal{J} neničelna gradirana ideala gradirane algebre \mathcal{A} . Pokažimo, da je $\mathcal{I}\mathcal{J} \neq 0$. Glede na

predpostavko obstajata elementa $0 \neq a \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$ in $0 \neq b \in \mathcal{H}(\mathcal{J})$. Prav tako lahko najdemo tak $x \in \mathcal{A}$, da je $0 \neq axb \in \mathcal{IJ}$. S tem smo pokazali želeno.

Predpostavimo sedaj, da je \mathcal{A} gradirana praalgebra in naj bosta $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ taka, da je $a\mathcal{A}b = 0$. Pokazati želimo, da je $a = 0$ ali $b = 0$. Ideala $\mathcal{I} = \mathcal{A}a\mathcal{A}$ in $\mathcal{J} = \mathcal{A}b\mathcal{A}$ sta taka gradirana ideala algebre \mathcal{A} , da je $\mathcal{IJ} = 0$. Po predpostavki sledi $\mathcal{I} = 0$ ali $\mathcal{J} = 0$. Naj bo $\mathcal{I} = 0$ (če je $\mathcal{J} = 0$, dokaz poteka analogno). Potem je $\mathcal{A}(a)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} = 0$, pri čemer je (a) najmanjši gradiran ideal algebre \mathcal{A} , ki vsebuje a . Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je $a = 0$. \square

Naj bo $\epsilon : G \times G \rightarrow \Phi^*$ ($\Phi^* = \Phi \setminus \{0\}$) antisimetrični bikarakter. To pomeni, da je ϵ homomorfizem v obeh argumentih in velja $\epsilon(g, h) = \epsilon(h, g)^{-1}$ za vse $g, h \in G$. Simbol ϵ bomo uporabili tudi za preslikavo, ki slika iz $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \times \mathcal{H}(\mathcal{A})$ v Φ^* , definirano s predpisom $\epsilon(a, b) = \epsilon(g, h)$, kjer sta $a \in \mathcal{A}_g$ in $b \in \mathcal{A}_h$. Prav tako bomo pisali $\epsilon(k, a) = \epsilon(k, g)$, kjer je $k \in G$ in $a \in \mathcal{A}_g$. Ni težko videti, da je $\epsilon(ab, c) = \epsilon(a, c)\epsilon(b, c)$ in $\epsilon(a, b) = \epsilon(b, a)^{-1}$ za vse $a, b, c \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Iz tega sledi, da je $\epsilon(a, a) = \pm 1$ za vsak $a \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Naj bo

$$G_+ = \{g \in G \mid \epsilon(g, g) = 1\} \text{ in } G_- = \{g \in G \mid \epsilon(g, g) = -1\}.$$

Definirajmo

$$\mathcal{A}_+ = \bigoplus_{g \in G_+} \mathcal{A}_g \text{ in } \mathcal{A}_- = \bigoplus_{g \in G_-} \mathcal{A}_g.$$

Potem je

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-.$$

Produktu $[a, b]_\epsilon = ab - \epsilon(a, b)ba$ pravimo ϵ -komutator elementov $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Gradiran podprostor $\mathcal{Z}_\epsilon(\mathcal{A}) = \{c \in \mathcal{A} \mid [c, a]_\epsilon = 0 \text{ za vsak } a \in \mathcal{A}\}$ je ϵ -center algebre \mathcal{A} .

V nadaljevanju bomo podali nekaj elementarnih rezultatov na področju gradiranih algeber. Gre pravzaprav za posplošitev nekaterih prej predstavljenih rezultatov na področju superalgeber (lema 1.22).

Lema 1.31. *Naj bo \mathcal{A} gradirana praalgebra in naj bodo $a \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$, $b \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$ ter $c \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.*

- (i) Če je $a\mathcal{A}_+a = 0$, je $a = 0$.
- (ii) Če je $c\mathcal{A}_- = 0$ (ali $\mathcal{A}_-c = 0$), je $c = 0$ ali $\mathcal{A}_- = 0$.
- (iii) Če je $a\mathcal{A}_-b = b\mathcal{A}_-a = 0$, je $a = 0$ ali $b = 0$.
- (iv) Če je $a\mathcal{A}_+b = b\mathcal{A}_+a = 0$, je $a = 0$ ali $b = 0$.
- (v) Če je $a\mathcal{A}_-c = 0$ (ali $c\mathcal{A}_-a = 0$), je $c = 0$ ali $a\mathcal{A}_-a = 0$.
- (vi) Če je $a\mathcal{A}_+c = 0$ (ali $c\mathcal{A}_+a = 0$), je $c = 0$ ali $a\mathcal{A}_-a = 0$.

Dokaz.

- (i) Naj bo $x \in \mathcal{A}_-$. Potem je $(axa)y(axa) \in a\mathcal{A}_+a\mathcal{A}_- = 0$ za vse $y \in \mathcal{A}_-$ in $(axa)z(axa) = 0$ za vse $z \in \mathcal{A}_+$. Če združimo obe enakosti, je $(axa)\mathcal{A}(axa) = 0$. Po lemi 1.30 sledi $axa = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Torej je $a\mathcal{A}_-a = 0$. Ker je po predpostavki $a\mathcal{A}_+a = 0$, sledi $a\mathcal{A}a = 0$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je $a = 0$.
- (ii) Naj bo $c\mathcal{A}_- = 0$. Potem je $c\mathcal{A}_+\mathcal{A}_- \subseteq c\mathcal{A}_- = 0$ in prav tako je $c\mathcal{A}_-\mathcal{A}_- = 0$. Torej je $c\mathcal{A}\mathcal{A}_- = 0$. Po lemi 1.30 sledi, da je $c = 0$ ali $\mathcal{A}_- = 0$. Če je $\mathcal{A}_-c = 0$, na podoben način pokažemo želeno.
- (iii) Predpostavimo, da je $a\mathcal{A}_-b = b\mathcal{A}_-a = 0$. Potem je $(axb)y(axb) = 0$ za vse $x \in \mathcal{A}_+$ in $y \in \mathcal{A}_-$. Po drugi strani opazimo, da je $(axb)z(axb) \in a\mathcal{A}_-b = 0$ za vse $x, z \in \mathcal{A}_+$. Iz tega sledi $(axb)\mathcal{A}(axb) = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Po lemi 1.30 je $a\mathcal{A}_+b = 0$. Glede na predpostavko sledi $a\mathcal{A}b = 0$. Upoštevamo še lemo 1.30 in implikacija je dokazana.
- (iv) Naj bo $a\mathcal{A}_+b = b\mathcal{A}_+a = 0$. Hitro opazimo, da je $(axb)\mathcal{A}_+(axb) = 0$ za vse $x \in \mathcal{A}_-$. Po drugi strani je $(axb)z(axb) \in a\mathcal{A}_+b = 0$ za vse $x, z \in \mathcal{A}_-$. Iz tega sledi $(axb)\mathcal{A}(axb) = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je $a\mathcal{A}_-b = 0$ in zato $a\mathcal{A}b = 0$. Sledi $a = 0$ ali $b = 0$.
- (v) Naj bo $a\mathcal{A}_-c = 0$. Potem je $axa\mathcal{A}_-c = 0$ za vse $x \in \mathcal{A}_-$. Po drugi strani vidimo, da je $axa\mathcal{A}_+c \subseteq a\mathcal{A}_-c = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}_-$. S pomočjo pravkar zapisanih relacij dobimo enakost $(axa)\mathcal{A}c = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}_-$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je $a\mathcal{A}_-a = 0$ ali $c = 0$.
 Predpostavimo, da je $c\mathcal{A}_-a = 0$. Potem na podoben način pokažemo želeno. Namreč, $c\mathcal{A}_-axa = 0$ in $c\mathcal{A}_+axa \subseteq c\mathcal{A}_-a = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}_-$. Torej je $c\mathcal{A}(axa) = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}_-$.

Iz tega sledi, da je $a\mathcal{A}_-a = 0$ ali $c = 0$, saj je \mathcal{A} gradirana praalgebra.

- (vi) Predpostavimo, da je $a\mathcal{A}_+c = 0$. Potem je $axa\mathcal{A}_+c = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}_-$. Prav tako je $axa\mathcal{A}_-c \subseteq a\mathcal{A}_+c = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}_-$. Torej je $axa\mathcal{A}c = 0$, iz česar sledi $a\mathcal{A}_-a = 0$ ali $c = 0$ (pri tem upoštevamo, da je \mathcal{A} gradirana praalgebra).

Naj bo $c\mathcal{A}_+a = 0$. Potem je $c\mathcal{A}_+axa = 0$ in $c\mathcal{A}_-axa \subseteq c\mathcal{A}_+a = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}_-$. Iz tega sledi, da je $c\mathcal{A}axa = 0$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je $c = 0$ ali $a\mathcal{A}_-a = 0$. \square

Gradirane algebre z ϵ -involucijo *

Kot v prejšnjih razdelkih, bomo predstavili definicijo ϵ -involucije na gradiranih algebrah.

Definicija 1.32. Naj bo \mathcal{A} gradirana algebra. Potem je Φ -modulski homomorfizem $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ϵ -involucija, če je $\mathcal{A}_g^* = \mathcal{A}_g$ za vsak $g \in G$ in za vsaka $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ velja:

- (i) $a^{**} = a$;
(ii) $(ab)^* = \epsilon(a, b)b^*a^*$.

Če sta $a, b \in \mathcal{A}_h$, $h \in G_+$, je $*$ običajna involucija na prostoru \mathcal{A}_h . Prav tako vidimo, da je $(ab)^* = b^*a^*$, če je vsaj eden izmed elementov a, b vsebovan v \mathcal{A}_1 .

Primer 1.33. Naj bo G taka Abelova grupa z bikarakterjem ϵ , da je $G \neq G_+$. Nadalje, naj bo $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G_+} \mathcal{A}_g$ ϵ -komutativna G_+ -gradirana algebra in naj bo $h \in G_-$. Na G -gradirani algebri $\mathcal{R} = M_2(\mathcal{A})$ je gradacija podana s predpisom

$$\mathcal{R}_g = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_g & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_g \end{bmatrix}$$

za vsak $g \in G_+$ in

$$\mathcal{R}_g = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_{gh^{-1}} \\ \mathcal{A}_{gh} & 0 \end{bmatrix}$$

za vsak $g \in G_-$.

Definirajmo homogeno ($\mathcal{A}_g^* = \mathcal{A}_g$ za vsak $g \in G$) linearno preslikavo $*$ na \mathcal{R} s predpisom

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \epsilon(d, h)d & b \\ -c & \epsilon(h, a)a \end{bmatrix}$$

za vse homogene elemente $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Potem je $*$ ϵ -involucija, ki ji pravimo simplektična ϵ -involucija.

Na enak način kot v primeru negradiranih algeber pravimo, da je $a \in \mathcal{A}$ *simetričen* element, če je $a^* = a$, in je *poševno simetričen*, če je $a^* = -a$. S simbolom \mathcal{S} označimo množico vseh simetričnih elementov, s simbolom \mathcal{K} pa množico vseh poševno simetričnih elementov. Ni težko videti, da velja $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{K}$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-$ in $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$.

ϵ -Jordanske algebre

V tem delu bomo predstavili definicijo in nekaj primerov ϵ -jordanskih algeber.

Definicija 1.34. *Neasociativna gradirana algebra $(\mathcal{A}, +, \circ_\epsilon)$ je ϵ -jordanska algebra, če velja:*

- (i) $x \circ_\epsilon y = \epsilon(x, y)y \circ_\epsilon x$;
- (ii) $\epsilon(z, xw)(x \circ_\epsilon y) \circ_\epsilon (w \circ_\epsilon z) + \epsilon(y, zw)(z \circ_\epsilon x) \circ_\epsilon (w \circ_\epsilon y) + \epsilon(x, yw)(y \circ_\epsilon z) \circ_\epsilon (w \circ_\epsilon x) = \epsilon(z, xw)((x \circ_\epsilon y) \circ_\epsilon w) \circ_\epsilon z + \epsilon(y, zw)((z \circ_\epsilon x) \circ_\epsilon w) \circ_\epsilon y + \epsilon(x, yw)((y \circ_\epsilon z) \circ_\epsilon w) \circ_\epsilon x$

za vse homogene elemente $w, x, y, z \in \mathcal{A}$.

Primer 1.35. Vpeljimo v asociativno gradirano algebro \mathcal{A} produkt s predpisom

$$x \circ_\epsilon y = \frac{1}{2}(xy + \epsilon(x, y)yx), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}).$$

Potem je algebra $\mathcal{A}_\epsilon^+ = (\mathcal{A}, +, \circ_\epsilon)$ ϵ -jordanska algebra.

Primer 1.36. Naj bo \mathcal{A} gradirana algebra z ϵ -involucijo. Potem je množica simetričnih elementov \mathcal{S} algebre \mathcal{A} ϵ -jordanska algebra za produkt \circ_ϵ .

Definicija 1.37. *Gradiran Φ -podmodul \mathcal{J} asociativne gradirane algebre \mathcal{A} je ϵ -jordanski ideal, če za poljubna homogena elementa $x \in \mathcal{J}$ in $a \in \mathcal{A}$ velja $x \circ_{\epsilon} a \in \mathcal{J}$.*

ϵ -Jordanski ideal asociativne gradirane algebre \mathcal{A} je gradiran ideal ϵ -jordanske algebre $\mathcal{A}_{\epsilon}^{+}$. Vsak gradiran ideal asociativne gradirane algebre \mathcal{A} je ϵ -jordanski ideal. V luči klasične Hersteinove teorije se postavi vprašanje, kdaj oziroma pod katerimi pogoji velja obratno. Omeniti velja, da sta se z gradiranimi ideali ϵ -jordanske algebre $\mathcal{A}_{\epsilon}^{+}$ ukvarjala Bergen in Grzeszczuk v članku [3]. Prav tako se v primeru, ko je \mathcal{A} gradirana algebra z ϵ -involucijo, postavi vprašanje o strukturnih značilnostih ϵ -jordanske algebre \mathcal{S} . Nekaj rezultatov na to temo je predstavljenih v članku [9].

2 Razširjeni centroid

Namen tega poglavja je podati osnovne lastnosti razširjenega centroida asociativne pra-superalgebre. V prvem delu se bomo posvetili predstavitvi osnovnih značilnosti razširjenega centroida asociativne praalgebre. V teoriji asociativnih algeber se je pojem razširjenega centroida asociativne praalgebre, ki ga je vpeljal Martindale leta 1969 (glej [2], [42]), izkazal za zelo uporabnega na različnih področjih, posebno v teoriji jordskih in Liejevih struktur v asociativnih algebrah. Ob tem se naravno zastavlja vprašanje glede razširjenega centroida asociativne pra-superalgebre. V duhu tega vprašanja bomo drugi del poglavja namenili posplošitvam znanih rezultatov. Predstavili bomo nekaj lastnosti razširjenega centroida asociativne pra-superalgebre in uporabnost le teh na področju superodvajanj, super-biodvajanj in funkcijske identitete v superalgebrah. Rezultati so predstavljeni v članku [19].

2.1 Razširjeni centroid asociativne praalgebre

Naj bo \mathcal{A} asociativna praalgebra. V nadaljevanju bomo s simbolom $Q = Q_r(\mathcal{A})$ označevali Martindaleovo algebro kvocientov, s simbolom C pa razširjeni centroid praalgebre \mathcal{A} . Naslednjih nekaj strani bomo namenili osnovnim lastnostim razširjenega centroida C (glej [2, poglavje 2]).

Lema 2.1. *Naj bo \mathcal{A} polpraalgebra, \mathcal{I} bistven ideal algebre \mathcal{A} in naj bo $f : {}_A\mathcal{I}_{\mathcal{A}} \rightarrow {}_A Q_{\mathcal{A}}$ bimodulski homomorfizem. Potem obstaja tak $\lambda \in C$, da je $f(x) = \lambda x$ za vsak $x \in \mathcal{I}$.*

Dokaz. Glede na predpostavko obstaja tak $\lambda \in Q$, da je $f(x) = \lambda x$ za vsak $x \in \mathcal{I}$. Potem je $\lambda yx = f(yx) = yf(x) = y\lambda x$ za vsak $y \in \mathcal{A}$ in $x \in \mathcal{I}$. Torej je $[\lambda, y]x = 0$. Zapisano drugače $[\lambda, \mathcal{A}]\mathcal{I} = 0$. Iz tega sledi $[\lambda, \mathcal{A}] = 0$ in zato $\lambda \in C$. \square

Izrek 2.2. *Naj bo \mathcal{A} polpraalgebra. Potem je \mathcal{A} praalgebra natanko tedaj, ko je C polje.*

Dokaz. Predpostavimo, da je \mathcal{A} praalgebra in naj bo $0 \neq \lambda \in C$. Pokažimo, da je λ obrnljiv element. Glede na definicijo razširjenega centroida obstaja tak bistven ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} , da je $\lambda\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$. Predpostavimo, da je $\lambda x = 0$ za neki $x \in \mathcal{A}$. Potem je $\lambda\mathcal{I}\mathcal{A}x = 0$. Iz tega sledi, da je $\lambda\mathcal{I} = 0$ ali $x = 0$. Ker je λ neničelni element, je $x = 0$. S tem smo pokazali, da je $\lambda\mathcal{I}$ bistven ideal algebre \mathcal{A} . Nadalje, naj bo $f : \lambda\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ preslikava definirana s predpisom $f(\lambda x) = x$ za vsak $x \in \mathcal{I}$. Glede na pravkar pokazano implikacijo, da iz $\lambda x = 0$ sledi $x = 0$, je f dobro definiran bimodulski homomorfizem. Potem nam lema 2.1 zagotavlja obstoj takega elementa $\mu \in C$, da je $f(\lambda x) = \mu(\lambda x)$ za vsak $x \in \mathcal{I}$. Po drugi strani pa je $f(\lambda x) = x$, iz česar sledi $(\mu\lambda - 1)\mathcal{I} = 0$. Ker je \mathcal{I} bistven ideal, sledi $\mu\lambda = 1$. S tem smo pokazali, da je λ obrnljiv element.

Naj bo C polje in predpostavimo, da \mathcal{A} ni praalgebra. Potem obstaja tak ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} , da je $\text{Ann}(\mathcal{I}) \neq 0$. Dalje, naj bo $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \oplus \text{Ann}(\mathcal{I})$. Ni težko videti, da je \mathcal{I}' bistven ideal algebre \mathcal{A} . Namreč, predpostavimo, da je $\mathcal{I}'\mathcal{J} = 0$ za nek ideal \mathcal{J} algebre \mathcal{A} . Potem je $\mathcal{I}\mathcal{J} = \text{Ann}(\mathcal{I})\mathcal{J} = 0$, iz česar sledi $\mathcal{J} = 0$, saj je $\mathcal{J} \subseteq \text{Ann}(\mathcal{I}) \cap \text{Ann}(\text{Ann}(\mathcal{I})) = 0$. Definirajmo preslikavi $f, g : \mathcal{I}' \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisoma $f(u + v) = u$ in $g(u + v) = v$ za vse $u \in \mathcal{I}$ ter $v \in \text{Ann}(\mathcal{I})$. Ni težko preveriti, da sta f in g neničelna bimodulska homomorfizma. Zato po lemi 2.1 obstajata taka neničelna elementa $\lambda, \mu \in C$, da je $f(u + v) = \lambda(u + v)$ in $g(u + v) = \mu(u + v)$ za vse $u \in \mathcal{I}$ in $v \in \text{Ann}(\mathcal{I})$. Potem sledi, da je $\lambda\mu(u_1 + v_1)(u_2 + v_2) = u_1v_2 \in \mathcal{I}\text{Ann}(\mathcal{I}) = 0$ za vse $u_1, u_2 \in \mathcal{I}$ in $v_1, v_2 \in \text{Ann}(\mathcal{I})$. S tem smo pokazali, da je $\lambda\mu\mathcal{I}'^2 = 0$. Ker je \mathcal{I}' bistven ideal, sledi $\lambda\mu = 0$. To pa je v protislovju s predpostavko, da sta λ in μ neničelna elementa polja C . S tem je dokaz izreka zaključen. \square

Lema 2.3. *Naj bo \mathcal{A} praalgebra in naj bosta $a, b \in Q$. Če je $axb = bxa$ za vse $x \in \mathcal{A}$, potem je $a = \lambda b$ za nek $\lambda \in C$.*

Dokaz. Naj bo \mathcal{J} tak bistven ideal algebre \mathcal{A} , da je $b\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$. Potem je tudi $\mathcal{I} = \mathcal{J}b\mathcal{J}$ bistven ideal algebre \mathcal{A} . Namreč, naj bo $\mathcal{I}\mathcal{K} = 0$ za nek ideal \mathcal{K} algebre \mathcal{A} . Ker je \mathcal{A} praalgebra, je $\mathcal{K} = 0$ ali $\mathcal{I} = 0$, iz česar sledi $b = 0$. Definirajmo preslikavo $f : \mathcal{I} \rightarrow Q$ s predpisom

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i b y_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a y_i,$$

$x_i, y_i \in \mathcal{J}$. Predpostavimo, da je $\sum_{i=1}^n x_i b y_i = 0$ za neke $x_i, y_i \in \mathcal{J}$. Ker je $axb = bxa$ za vse $x \in \mathcal{A}$, je $0 = (\sum_{i=1}^n x_i b y_i) z a = (\sum_{i=1}^n x_i a y_i) z b$ za vse $z \in \mathcal{A}$. Ker je $b \neq 0$ in je \mathcal{A} praalgebra, je $\sum_{i=1}^n x_i a y_i = 0$. S tem smo pokazali, da je f dobro definirana preslikava. Prav tako lahko preverimo, da je f bimodulski homomorfizem. Po lemi 2.1 obstaja tak $\lambda \in C$, da je $f(u) = \lambda u$ za vsak $u \in \mathcal{I}$. Iz tega sledi, da je $xay = f(xby) = \lambda xby$ za vsaka $x, y \in \mathcal{J}$. To pomeni, da je $J(a - \lambda b)\mathcal{J} = 0$ in zato je $a = \lambda b$. \square

Izrek 2.4. *Naj bo \mathcal{A} praalgebra, $a_i, b_i \in Q$, $i = 1, \dots, n$ in naj bo $b_1 \neq 0$. Če je $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$, potem obstajajo taki $\lambda_i \in C$, $i = 1, \dots, n$, ne vsi nič, da je $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$.*

Dokaz. Ker je \mathcal{A} praalgebra, je rezultat trivialen v primeru, ko je $n = 1$. Namreč, iz enakosti $a_1 \mathcal{A} b_1 = 0$ sledi $a_1 = 0$, saj je $b_1 \neq 0$.

Predpostavimo, da je trditev resnična za vsako naravno število manjše od n . Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $b_1 \in \mathcal{A}$. Namreč, če $b_1 \notin \mathcal{A}$, potem obstaja tak element $c \in \mathcal{A}$, da je $0 \neq b_1 c \in \mathcal{A}$. in v nadaljevanju obravnavamo identiteto $\sum_{i=1}^n a_i x (b_i c) = 0$, kar nas vodi do zelenega rezultata.

Zamenjajmo v identiteti $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$ element x z elementom $x b_1 y$, $x, y \in \mathcal{A}$. Torej je $\sum_{i=1}^n a_i x b_1 y b_i = 0$. Po drugi strani pa ni težko videti, da je

$$(a_1 x b_1) y b_1 = -(a_2 x b_2 + \dots + a_n x b_n) y b_1.$$

Primerjajmo med seboj pravkar zapisani identiteti. To nas privede do enakosti

$$a_2 x (b_1 y b_2 - b_2 y b_1) + \dots + a_n x (b_1 y b_n - b_n y b_1) = 0.$$

S pomočjo induksijske predpostavke sledi zeleni rezultat, razen v primeru, ko je $b_1 y b_i - b_i y b_1 = 0$ za vse $i = 2, \dots, n$ in za vse $y \in \mathcal{A}$. Potem po lemi 2.3 obstajajo taki $\lambda_i \in C$, $i = 2, \dots, n$, da je $b_i = \lambda_i b_1$. Iz tega sledi, da je $(a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) x b_1 = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Ker je \mathcal{A} praalgebra in je $b_1 \neq 0$, sledi $a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$. S tem je dokaz zaključen. \square

Izrek 2.5. *Naj bo \mathcal{A} praalgebra in naj bodo $a_i, b_i, c_j, d_j \in Q$ taki, da je $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = \sum_{j=1}^m c_j x d_j$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.*

- (i) če so a_i linearno neodvisni nad C , potem je $b_i \in Cd_1 + \dots + Cd_m$ za vsak $i = 1, \dots, n$;
- (ii) če so b_i linearno neodvisni nad C , potem je $a_i \in Cc_1 + \dots + Cc_m$ za vsak $i = 1, \dots, n$.

Dokaz. Ker se oba primera dokažeta na analogen način, bomo pokazali le implikacijo (i). Predpostavimo, da je $b_1 \neq 0$. Brez izgube za splošnost smemo predpostaviti, da je vsak c_j linearna kombinacija a_i , $i = 1, \dots, n$. Namreč, če za nek c_j to ne velja, potem $c_j x d_j$ pišemo na levi strani enakosti in nadaljujemo postopek. Torej obstajajo taki $\lambda_{ji} \in C$, da je $\sum_{j=1}^m c_j x d_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \lambda_{ji} a_i) x d_j$ za vse $x \in \mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je $\sum_{i=1}^n a_i x (b_i - \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} d_j) = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Po izreku 2.4 sledi, da je $b_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} d_j$ za vsak i , saj so po predpostavki a_i linearno neodvisni. \square

Produkt odvajanj

V tem delu bomo pokazali Posnerjev rezultat, ki odgovarja na vprašanje, ali je produkt dveh odvajanj na praalgebri odvajanje. Najprej zapišimo lemo, ki jo bomo v nadaljevanju potrebovali.

Lema 2.6. *Naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n aditivne grupe in naj bo \mathcal{A} polpraalgebra. Predpostavimo, da sta preslikavi $S : G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \rightarrow \mathcal{A}$ in $T : G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \rightarrow \mathcal{A}$ aditivni v vsakem argumentu. Če je $S(a_1, a_2, \dots, a_n) \mathcal{A} T(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ za vse $a_i \in G_i$, $i = 1, \dots, n$, je $S(a_1, a_2, \dots, a_n) \mathcal{A} T(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$ za vse $a_i, b_i \in G_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Dokaz. Zadostuje, če dokažemo lemo za $n = 1$. S postopkom linearizacije enakosti $S(a)xT(a) = 0$, $a \in G_1$, $x \in \mathcal{A}$, vidimo, da je $S(a)xT(b) + S(b)xT(a) = 0$ za vse $a, b \in G_1$ ter $x \in \mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je

$$(S(a)xT(b))y(S(a)xT(b)) = -S(a)(xT(b)yS(b)x)T(a) = 0$$

za vse $a, b \in G_1$, $x, y \in \mathcal{A}$. Ker je \mathcal{A} polpraalgebra, je $S(a)\mathcal{A}T(b) = 0$ za vsaka $a, b \in G_1$. \square

V nadaljevanju bomo predstavili Posnerjev izrek o produktu odvajanj.

Izrek 2.7. [48] *Naj bo \mathcal{A} asociativna praalgebra in naj bosta d ter g neničelni odvajanja na algebri \mathcal{A} . Potem dg ni odvajanje.*

Dokaz. Predpostavimo, da je dg odvajanje na algebri \mathcal{A} . Potem je

$$(dg)(xy) = (dg)(x)y + x(dg)(y)$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Po drugi strani velja

$$\begin{aligned} (dg)(xy) &= d(g(x)y + xg(y)) \\ &= (dg)(x)y + g(x)d(y) + d(x)g(y) + x(dg)(y). \end{aligned}$$

Primerjajmo obe identiteti, kar nas vodi do enakosti

$$g(x)d(y) + d(x)g(y) = 0$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Namesto y pišimo element yx . Potem je

$$\begin{aligned} 0 &= g(x)d(yx) + d(x)g(yx) \\ &= g(x)d(y)x + g(x)yd(x) + d(x)g(y)x + d(x)yg(x) \\ &= g(x)yd(x) + d(x)yg(x) \end{aligned}$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Iz tega sledi

$$\begin{aligned} g(x)yd(x)zd(x) &= -d(x)yg(x)zd(x) = d(x)yd(x)zg(x) \\ &= -g(x)yd(x)zd(x) \end{aligned}$$

za vse $x, y, z \in \mathcal{A}$. Torej je

$$g(x)yd(x)zd(x) = 0.$$

Ker je \mathcal{A} praalgebra, je $g(x)Ad(x) = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Nadaljnji razmislek nas s pomočjo leme 2.6 vodi do enakosti $g(x)Ad(y) = 0$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Ker je \mathcal{A} praalgebra, sledi $d = 0$ ali $g = 0$. S tem je dokaz zaključen. \square

Biodvajanja

Definicija 2.8. *Naj bo \mathcal{A} algebra. Biaditivna preslikava $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ je biodvajanje, če velja:*

(i) *za vsak $x \in \mathcal{A}$ je preslikava $y \mapsto B(x, y)$ odvajanje na \mathcal{A} ;*

(ii) za vsak $y \in \mathcal{A}$ je preslikava $x \mapsto B(x, y)$ odvajanje na \mathcal{A} .

V članku [10] so Brešar, Martindale in Miers karakterizirali biodvajanja na praalgebrah.

Izrek 2.9. [10] *Naj bo \mathcal{A} asociativna nekomutativna praalgebra in naj bo $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ biodvajanje. Potem obstaja tak $\lambda \in C$, da je $B(x, y) = \lambda[x, y]$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. Naj bodo $w, x, y, z \in \mathcal{A}$. Oglejmo si izraz $B(xy, zw)$. Po eni strani je

$$\begin{aligned} & B(xy, zw) \\ &= B(xy, z)w + zB(xy, w) \\ &= B(x, z)yw + xB(y, z)w + zxB(y, w) + zB(x, w)y. \end{aligned}$$

Po drugi strani pa vidimo, da je

$$\begin{aligned} & B(xy, zw) \\ &= B(x, zw)y + xB(y, zw) \\ &= zB(x, w)y + B(x, z)wy + xzB(y, w) + xB(y, z)w. \end{aligned}$$

Če primerjamo ti dve enakosti, opazimo, da je

$$B(x, z)[y, w] = [x, z]B(y, w).$$

za vse $w, x, y, z \in \mathcal{A}$. Zamenjajmo v tej identiteti element w z elementom vw , $v \in \mathcal{A}$. Potem je $B(x, z)[y, vw] = [x, z]B(y, vw)$. Upoštevajmo, da je $[y, vw] = [y, v]w + v[y, w]$ in $B(y, vw) = B(y, v)w + vB(y, w)$. Iz tega sledi, da je

$$B(x, z)v[y, w] = [x, z]vB(y, w) \tag{2.1}$$

za vse $v, w, x, y, z \in \mathcal{A}$. Po predpostavki je \mathcal{A} nekomutativna algebra. Torej smemo privzeti, da je $[y, w] \neq 0$. Po lemi 2.3 obstaja tak element $\lambda \in C$, da je $B(y, w) = \lambda[y, w]$. Upoštevajmo enakost (2.1), iz česar sledi $B(x, z)v[y, w] = [x, z]v\lambda[y, w]$. Potem je $(B(x, z) - \lambda[x, z])v[y, w] = 0$ za vse $v, w, x, y, z \in \mathcal{A}$. Ker je \mathcal{A} praalgebra in je po predpostavki $[y, w] \neq 0$, je $B(x, z) = \lambda[x, z]$ za vsaka $x, z \in \mathcal{A}$. \square

Funkcijska identiteta v algebrah

Zapišimo najprej, kdaj je preslikava komutirajoča.

Definicija 2.10. *Naj bo \mathcal{A} algebra. Preslikava $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ je komutirajoča, če je $[f(x), x] = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.*

Če je f aditivna komutirajoča preslikava, lahko z uporabo linearizacije hitro izpeljemo, da je

$$[f(x), y] = [x, f(y)] \text{ za vsaka } x, y \in \mathcal{A}.$$

V članku [7] je Brešar karakteriziral komutirajoče preslikave na praalgebrah.

Izrek 2.11. [7] *Naj bo \mathcal{A} asociativna praalgebra in naj bo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ aditivna komutirajoča preslikava. Potem obstaja tak $\lambda \in C$ in aditivna preslikava $\mu : \mathcal{A} \rightarrow C$, da je $f(x) = \lambda x + \mu(x)$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. Ni težko preveriti, da je $B(x, y) = [f(x), y] = [x, f(y)]$, $x, y \in \mathcal{A}$, biodvajanje. V primeru, ko je \mathcal{A} komutativna algebra, lahko izberemo $\lambda = 0$ in $\mu = f$. V nadaljevanju predpostavimo, da je \mathcal{A} nekomutativna algebra. Po izreku 2.9 obstaja tak element $\lambda \in C$, da je $B(x, y) = \lambda[x, y]$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Potem je $[f(x), y] = \lambda[x, y]$. To pomeni, da je $[f(x) - \lambda x, \mathcal{A}] = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je $f(x) - \lambda x \in C$. S tem smo pokazali, da obstaja aditivna preslikava $\mu : \mathcal{A} \rightarrow C$ definirana s predpisom $\mu(x) = f(x) - \lambda x$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Dokaz je zaključen. \square

2.2 Razširjeni centroid asociativne pra-superalgebre

V tem delu monografije se bomo osredotočili na lastnosti razširjenega centroida asociativne pra-superalgebre. Nekateri rezultate, predstavljene v prejšnjem razdelku, bomo posplošili na področje superalgeber.

Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra. Potem je po lemi 1.20 \mathcal{A} polpraalgebra, kar pomeni, da lahko konstruiramo razširjeni centroid C superalgebre \mathcal{A} . V nadaljevanju bomo potrebovali naslednji izrek.

Izrek 2.12. [2, trditev 2.5.3] *Poljuben avtomorfizem polpraalgebre lahko enolično razširimo na Martindaleovo algebro kvocientov.*

Ker je \mathcal{A} superalgebra, obstaja tak avtomorfizem σ algebre \mathcal{A} , da je $\sigma^2 = id$. Glede na pravkar zapisan izrek sledi, da lahko preslikavo σ enolično razširimo na centralno zaprtje $\overline{\mathcal{A}}$. Še več, iz dokaza izreka je razvidno, da je prav tako $\sigma^2 = id$ na $\overline{\mathcal{A}}$. To pomeni, da je centralno zaprtje $\overline{\mathcal{A}}$ superalgebra, pri čemer je \mathbb{Z}_2 -gradacija na $\overline{\mathcal{A}}$ razširitev \mathbb{Z}_2 -gradacije na algebri \mathcal{A} . Ker je $C^\sigma = C$, je razširjeni centroid C gradiran, kar pomeni, da je $C = C_0 \oplus C_1$.

Če je $a \in \overline{\mathcal{A}}$, potem obstaja tak bistven ideal \mathcal{I} superalgebre \mathcal{A} , da je $a\mathcal{I} \cup \mathcal{I}a \subseteq \mathcal{A}$. V nadaljevanju bomo brez dodatne razlage prevzeli, da je \mathcal{I} gradiran ideal. Namreč, če \mathcal{I} ni gradiran ideal, ga lahko zamenjamo z idealom $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^\sigma$, ki pa je gradiran.

Naslednja lema je posplošitev leme 1.17.

Lema 2.13. *Naj bo \mathcal{I} nenčelni gradiran ideal asociativne pra-superalgebre \mathcal{A} in naj bosta $a, b \in \overline{\mathcal{A}}$ taka, da je $a\mathcal{I}b = 0$. Predpostavimo, da je vsaj eden izmed elementov a in b homogen. Potem sledi, da je $a = 0$ ali $b = 0$.*

Dokaz. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da je b homogen element. Ker sta $a, b \in \overline{\mathcal{A}}$, obstajata taka gradirana ideala \mathcal{J} in \mathcal{K} algebre \mathcal{A} , da je $\mathcal{J}a \subseteq \mathcal{A}$ ter $b\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$. Torej je $\mathcal{J}a\mathcal{I}b\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}a\mathcal{I}b\mathcal{K} = 0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra in \mathcal{K} gradiran ideal, sledi $\mathcal{J}a\mathcal{I} = 0$ ali $b\mathcal{K} = 0$. Iz slednjega sledi $b = 0$. Predpostavimo, da je $\mathcal{J}a\mathcal{I} = 0$. Potem je $\mathcal{J}a\mathcal{A}\mathcal{I} = 0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebre, je $\mathcal{J}a = 0$ ali $\mathcal{I} = 0$. ker pa je \mathcal{I} nenčelni gradiran ideal, je $\mathcal{J}a = 0$. Iz tega sledi, da je $a = 0$. Dokaz je zaključen. \square

Vemo že, da je razširjeni centroid praalgebre polje. Naslednja lema je posplošitev tega rezultata na pra-superalgebre.

Lema 2.14. *Asociativna polpra-superalgebra \mathcal{A} je pra-superalgebra natanko tedaj, ko so vsi neničelni homogeni elementi razširjenega centroida C obrnljivi.*

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je \mathcal{A} pra-superalgebra. Naj bo $0 \neq \lambda \in C_0 \cup C_1$. Pokažimo, da je λ obrnljiv element. Naj bo \mathcal{I} tak bistven gradiran ideal superalgebre \mathcal{A} , da je $\lambda\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$. Če je $\lambda x = 0$ za neki $x \in \mathcal{A}$, potem je $\lambda\mathcal{A}x = 0$. Po lemi 2.13 sledi, da je $x = 0$. S tem smo pokazali, da je $\lambda\mathcal{I}$ bistveni ideal algebre \mathcal{A} . Naj bo $f : \lambda\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ preslikava definirana s predpisom $f(\lambda x) = x$, $x \in \mathcal{I}$. Ni

težko preveriti, da je f dobro definiran bimodulski homomorfizem. Potem po lemi 2.1 obstaja tak $\mu \in C$, da je $f(\lambda x) = \mu(\lambda x) = x$ za vsak $x \in \mathcal{I}$. Iz tega sledi $(\mu\lambda - 1)\mathcal{I} = 0$ in zato je $\mu\lambda = 1$. S tem smo pokazali, da je λ obrnljiv element razširjenega centroida C .

Predpostavimo sedaj, da \mathcal{A} ni pra-superalgebra. Potem obstajata taka neničelna gradirana ideala \mathcal{I} in \mathcal{J} superalgebre \mathcal{A} , da je $\mathcal{I}\mathcal{J} = 0$. Naj bosta $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \oplus \text{Ann}(\mathcal{I})$ in $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \oplus \text{Ann}(\mathcal{J})$. Ni težko preveriti, da sta \mathcal{I}' in \mathcal{J}' bistvena gradirana ideala algebre \mathcal{A} . Namreč, če je $\mathcal{I}'\mathcal{K} = 0$ za nek gradiran ideal \mathcal{K} algebre \mathcal{A} , je $\mathcal{I}\mathcal{K} = \text{Ann}(\mathcal{I})\mathcal{K} = 0$. Iz tega sledi, da je $\mathcal{K} = 0$, saj je $\mathcal{K} \subseteq \text{Ann}(\mathcal{I}) \cap \text{Ann}(\text{Ann}(\mathcal{I})) = 0$. Podobno bi pokazali, da je \mathcal{J}' bistven ideal. Naj bosta $f : \mathcal{I}' \rightarrow \mathcal{A}$ in $g : \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{A}$ preslikavi definirani s predpisoma $f(u+v) = u$ za vse $u \in \mathcal{I}$, $v \in \text{Ann}(\mathcal{I})$ ter $g(w+x) = w$ za vse $w \in \mathcal{J}$, $x \in \text{Ann}(\mathcal{J})$. Hitro lahko preverimo, da sta f in g neničelna bimodulska homomorfizma. Potem pa po lemi 2.1 obstajata taka neničelna elementa $\lambda, \mu \in C$, da je $f(u+v) = \lambda(u+v)$ za vsak $u+v \in \mathcal{I}'$ ter $g(w+x) = \mu(w+x)$ za vsak $w+x \in \mathcal{J}'$. Iz tega sledi, da je $\lambda\mu(u+v)(w+x) = uw \in \mathcal{I}\mathcal{J} = 0$. To pomeni, da je $\lambda\mu\mathcal{I}'\mathcal{J}' = 0$. Ker sta \mathcal{I}' in \mathcal{J}' bistvena ideala, sledi $\lambda\mu = 0$. Pokažimo, da λ (in podobno μ) pripada sodemu delu razširjenega centroida C_0 . Ker je $\lambda \in C$, lahko pišemo $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, pri čemer je $\lambda_0 \in C_0$ in $\lambda_1 \in C_1$. Nadaljnji razmislek nas privede do tega, da iz $\lambda u = f(u) = u$, $u \in \mathcal{I}_0$, sledi $\lambda_0 u + \lambda_1 u = u$ in zato je $\lambda_1 u = 0$. Podobno, iz $\lambda u = f(u) = u$, $u \in \mathcal{I}_1$, sledi $\lambda_1 u = 0$. S tem smo pokazali, da je $\lambda_1 \mathcal{I}_0 = \lambda_1 \mathcal{I}_1 = 0$. To pomeni, da je $\lambda_1 \mathcal{I} = 0$. Prav tako opazimo, da iz $\lambda v = f(v) = 0$, $v \in \text{Ann}(\mathcal{I})$, sledi $\lambda_1 \text{Ann}(\mathcal{I}) = 0$. Pri tem upoštevamo, da je $\text{Ann}(\mathcal{I})$ gradiran ideal. Iz pokazanega vidimo, da je $\lambda_1 \mathcal{I}' = 0$. Torej je $\lambda_1 = 0$, saj je \mathcal{I}' bistven gradiran ideal. S tem smo pokazali, da je $\lambda = \lambda_0 \in C_0$. Podobno bi pokazali, da je μ homogen element razširjenega centroida C . Pokazali smo torej, da obstajata dva neničelna elementa λ in μ razširjenega centroida C , katerih produkt je nič. To pa je v protislovju s predpostavko, da so vsi neničelni homogeni elementi razširjenega centroida C obrnljivi. S tem je dokaz zaključen. \square

Naslednja dva rezultata sta razširitvi klasičnih Martindaleovih rezultatov (lema 2.3 in izrek 2.4) na superalgebre.

Lema 2.15. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra in naj bosta*

$a, b \in \overline{\mathcal{A}}$ taka elementa, da je $axb = bxa$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Če je b neničelni homogeni element, potem obstaja tak $\lambda \in C$, da je $a = \lambda b$.

Dokaz. Dokaz poteka podobno kot dokaz leme 2.3. Naj bo \mathcal{J} tak bistven gradiran ideal algebre \mathcal{A} , da je $b\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$. Ni težko videti, da je tudi $\mathcal{I} = \mathcal{J}b\mathcal{J}$ bistven ideal algebre \mathcal{A} . Namreč, če je $\mathcal{I}\mathcal{K} = 0$ za nek gradiran ideal \mathcal{K} algebre \mathcal{A} , je $\mathcal{I}\mathcal{A}\mathcal{K} = 0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, je $\mathcal{I} = 0$ ali $\mathcal{K} = 0$. V primeru, ko je $\mathcal{I} = 0$, sledi $b\mathcal{J} = 0$ in zato je $b = 0$. Naj bo $f : \mathcal{I} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ preslikava definirana s predpisom

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i b y_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a y_i, \quad x_i, y_i \in \mathcal{J}.$$

Če je $\sum_{i=1}^n x_i b y_i = 0$ za neke $x_i, y_i \in \mathcal{J}$, je

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n x_i b y_i\right)za = \left(\sum_{i=1}^n x_i a y_i\right)zb \quad \text{za vsak } z \in \mathcal{A}.$$

Ker je b neničelni homogeni element, po lemi 2.13 sledi $\sum_{i=1}^n x_i a y_i = 0$. To pomeni, da je f dobro definirana preslikava. Prav tako ni težko preveriti, da je f bimodulski homomorfizem. Potem pa obstaja tak $\lambda \in C$, da je $f(u) = \lambda u$ za vsak $u \in \mathcal{I}$. Torej je $xay = f(xby) = \lambda xby$ za vsaka $x, y \in \mathcal{J}$. Iz tega sledi $\mathcal{J}(a - \lambda b)\mathcal{J} = 0$. Ker je \mathcal{J} bistven ideal, je $a = \lambda b$. S tem je dokaz zaključen. \square

Izrek 2.16. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra in naj bodo $a_i, b_i \in \overline{\mathcal{A}}$, kjer je $i = 1, \dots, n$. Predpostavimo, da so vsi b_i homogeni elementi in $b_1 \neq 0$. Če je $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$, potem obstajajo taki $\lambda_i \in C$, $i = 1, \dots, n$, ne vsi nič, da je $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$.*

Dokaz. Ideja dokaza je podobna ideji dokaza izreka 2.4. Naj bo $n = 1$. Potem je $a_1 x b_1 = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Ker je po predpostavki \mathcal{A} pra-superalgebra in $b_1 \neq 0$, je $a_1 = 0$.

Predpostavimo, da velja izrek za vsako naravno število manjše od n . Brez izgube za splošnost smemo privzeti, da je $b_1 \in \mathcal{A}$. Namreč, če $b_1 \notin \mathcal{A}$, potem obstaja tak homogen element $c \in \mathcal{A}$, da je $0 \neq b_1 c \in \mathcal{A}$ in obravnavamo identiteto $\sum_{i=1}^n a_i x (b_i c) = 0$.

Zamenjajmo v identiteti $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$ element x z elementom $x b_1 y$, $x, y \in \mathcal{A}$. Potem je $\sum_{i=1}^n a_i x b_1 y b_i = 0$. Po drugi strani pa

opazimo, da je

$$(a_1xb_1)yb_1 = -(a_2xb_2 + \dots + a_nxb_n)yb_1.$$

Če primerjamo obe enakosti, dobimo

$$a_2x(b_1yb_2 - b_2yb_1) + \dots + a_nx(b_1yb_n - b_nyb_1) = 0.$$

Po indukcijski predpostavki sledi želeni rezultat, razen v primeru, ko je

$$b_1yb_i - b_iyb_1 = 0$$

za vse $i = 2, \dots, n$ in za vse homogene elemente $y \in \mathcal{A}$. V tem primeru nam lema 2.15 zagotavlja obstoj takih elementov $\lambda_i \in C$, $i = 2, \dots, n$, da je $b_i = \lambda_i b_1$. Poleg tega je $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$, iz česar sledi $(a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) x b_1 = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Ker je $b_1 \neq 0$, je $a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$. Dokaz je zaključen. \square

Rezultati, ki smo jih podali do sedaj, so posplošitve že znanih rezultatov. V nadaljevanju bomo zapisali izrek, ki je nekoliko manj predvidljiv. Obravnavali bomo enakost $\sum_{i=1}^n a_i x_k b_i = 0$, kjer so $a_i = a_{i_0} + a_{i_1}$ ter $b_i = b_{i_0} + b_{i_1}$ elementi algebre \mathcal{A} in je $k = 0$ ali $k = 1$. Raziskavo bomo razdelili na dva primera: primer, ko je lihi del $C_1 = 0$ in primer, ko je lihi del $C_1 \neq 0$. Izkaže se, da je v prvem primeru, ko je lihi del razširjenega centroida nič, problem nekoliko bolj zapleten v primerjavi z drugim primerom. Najprej zapišimo lemo, kjer predvidevamo, da je $C_1 = 0$.

Lema 2.17. *Naj bo \mathcal{A} taka asociativna pra-superalgebra, da je $C_1 = 0$ in naj bo $k = 0$ ali $k = 1$. Predpostavimo, da so $a_{i_0}, b_{i_0} \in \mathcal{A}_0$ in $a_{j_1}, b_{j_1} \in \mathcal{A}_1$ taki, da je*

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_0} = \sum_{j=1}^m a_{j_1} x_k b_{j_1} \quad \text{za vsak } x_k \in \mathcal{A}_k.$$

Potem je

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_0} = \sum_{j=1}^m a_{j_1} x_k b_{j_1} = 0 \quad \text{za vsak } x_k \in \mathcal{A}_k.$$

Dokaz. Lemo bomo pokazali s pomočjo matematične indukcije. Dokaz bo razdeljen v dva sklopa. Najprej bomo obravnavali primer, ko je $k = 0$, potem pa primer, ko je $k = 1$.

Primer 1. Predpostavimo, da je $k = 0$. Naj bo $n = m = 1$,

$$a_{1_0}x_0b_{1_0} = a_{1_1}x_0b_{1_1} \quad \text{za vsak } x_0 \in \mathcal{A}_0. \quad (2.2)$$

Namesto x_0 pišimo $x_0b_{1_0}y_0$. Torej je $a_{1_0}x_0b_{1_0}y_0b_{1_0} = a_{1_1}x_0b_{1_0}y_0b_{1_1}$, kar nas privede do enakosti

$$a_{1_1}(x_0b_{1_0}y_0)b_{1_1} = (a_{1_0}x_0b_{1_0})y_0b_{1_0} = a_{1_1}x_0b_{1_1}y_0b_{1_0}$$

za vsaka $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$. Iz tega sledi, da je

$$a_{1_1}x_0(b_{1_0}y_0b_{1_1} - b_{1_1}y_0b_{1_0}) = 0 \quad \text{za vsaka } x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0. \quad (2.3)$$

Če pomnožimo enakost (2.2) z desne strani z elementom $y_1b_{1_1}$, $y_1 \in \mathcal{A}_1$, je

$$(a_{1_0}x_0b_{1_0})y_1b_{1_1} = a_{1_1}(x_0b_{1_1}y_1)b_{1_1} = a_{1_0}x_0b_{1_1}y_1b_{1_0}.$$

To pomeni, da je

$$a_{1_0}x_0(b_{1_0}y_1b_{1_1} - b_{1_1}y_1b_{1_0}) = 0 \quad \text{za vsaka } x_0 \in \mathcal{A}_0, y_1 \in \mathcal{A}_1 \quad (2.4)$$

Glede na lemo 1.22 (iv) ni težko videti, da iz enakosti (2.3) sledi $a_{1_1}x_0a_{1_1} = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$ ali $b_{1_0}y_0b_{1_1} - b_{1_1}y_0b_{1_0} = 0$ za vsak $y_0 \in \mathcal{A}_0$. Podobno, iz identitete (2.4) in leme 1.22 (v) sledi, da je bodisi $a_{1_0}x_1a_{1_0} = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$ ali $b_{1_0}y_1b_{1_1} - b_{1_1}y_1b_{1_0} = 0$ za vsak $y_1 \in \mathcal{A}_1$.

Predpostavimo najprej, da je $a_{1_1}x_0a_{1_1} = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$, in upoštevajmo enakost (2.2). Potem je

$$\begin{aligned} & (a_{1_1}x_0b_{1_1})\mathcal{A}_0(a_{1_1}x_0b_{1_1})\mathcal{A}_0(a_{1_1}x_0b_{1_1}) \\ &= (a_{1_1}x_0b_{1_1})\mathcal{A}_0(a_{1_0}x_0b_{1_1})\mathcal{A}_0(a_{1_1}x_0b_{1_0}) = 0. \end{aligned}$$

Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, sledi $a_{1_1}x_0b_{1_1} = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Potem je tudi $a_{1_0}x_0b_{1_0} = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Podobno vidimo, da v primeru, ko je $a_{1_0}x_1a_{1_0} = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$, sledi

$$\begin{aligned} & (a_{1_0}x_0b_{1_0})\mathcal{A}_0(a_{1_0}x_0b_{1_0})\mathcal{A}_0(a_{1_0}x_0b_{1_0}) \\ &= (a_{1_0}x_0b_{1_0})\mathcal{A}_0(a_{1_1}x_0b_{1_0})\mathcal{A}_0(a_{1_0}x_0b_{1_1}) = 0. \end{aligned}$$

Ponovno upoštevajmo, da je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, kar nas vodi do zelene enakosti $a_{1_0}x_0b_{1_0} = 0 = a_{1_1}x_0b_{1_1}$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$.

Naj bo sedaj

$$b_{1_0}y_0b_{1_1} = b_{1_1}y_0b_{1_0} \quad \text{in} \quad b_{1_0}y_1b_{1_1} = b_{1_1}y_1b_{1_0}$$

za vsak $y_0 \in \mathcal{A}_0$ ter za vsak $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Če primerjamo obe identiteti, pridemo do enakosti

$$b_{1_0}yb_{1_1} = b_{1_1}yb_{1_0} \text{ za vsak } y \in \mathcal{A}.$$

V primeru, ko je $b_{1_1} = 0$, sledi želeno. Torej smemo predpostaviti, da je $b_{1_1} \neq 0$. Potem po lemi 2.15 obstaja tak element $\lambda \in C$, da je $b_{1_0} = \lambda b_{1_1}$. Ker je po predpostavki $C = C_0$, je $\lambda = 0$. To pomeni, da je $b_{1_0} = 0$. S tem smo pokazali želeno, $a_{1_0}x_0b_{1_0} = 0 = a_{1_1}x_0b_{1_1}$.

V naslednjem koraku bomo pokazali lemo za $n = 1$ in poljubno naravno število m . Naj bo $m > 1$ in predpostavimo, da velja trditev za vsako naravno število manjše od m . Torej, obravnavajmo identiteto

$$a_{1_0}x_0b_{1_0} = \sum_{i=1}^m a_{i_1}x_0b_{i_1} \quad \text{za vsak } x_0 \in \mathcal{A}_0. \quad (2.5)$$

Cilj je pokazati, da sta obe strani zapisane identitete enaki nič. Zamenjajmo v enakosti (2.5) element x_0 z elementom $x_0b_{1_1}y_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je

$$\begin{aligned} a_{1_0}x_0b_{1_1}y_1b_{1_0} &= \sum_{i=1}^m a_{i_1}x_0b_{1_1}y_1b_{i_1} \\ &= a_{1_0}x_0b_{1_0}y_1b_{1_1} - \sum_{i=2}^m a_{i_1}x_0b_{i_1}y_1b_{1_1} \\ &\quad + \sum_{i=2}^m a_{i_1}x_0b_{1_1}y_1b_{i_1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

in zato je

$$a_{1_0}x_0(b_{1_1}y_1b_{1_0} - b_{1_0}y_1b_{1_1}) = \sum_{i=2}^m a_{i_1}x_0(b_{1_1}y_1b_{i_1} - b_{i_1}y_1b_{1_1}).$$

Glede na indukcijsko predpostavko sledi, da je

$$a_{1_0}x_0(b_{1_1}y_1b_{1_0} - b_{1_0}y_1b_{1_1}) = 0$$

za vsaka $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Po lemi 1.22 (točka (v)) je $a_{1_0}x_1a_{1_0} = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$ ali $b_{1_1}y_1b_{1_0} - b_{1_0}y_1b_{1_1} = 0$ za vsak $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Predpostavimo najprej, da je $a_{1_0}x_1a_{1_0} = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. V

enakosti (2.5) pišimo namesto x_0 element $x_0 a_{1_0} y_0$, $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$. Torej je

$$a_{1_0} x_0 a_{1_0} y_0 b_{1_0} = \sum_{i=1}^m a_{i_1} x_0 a_{1_0} y_0 b_{i_1}.$$

Tako dobljeno identiteto pomnožimo na levi strani z elementom $a_{1_0} z_0$, $z_0 \in \mathcal{A}_0$. Razmislek nas vodi do enakosti $a_{1_0} z_0 a_{1_0} x_0 a_{1_0} y_0 b_{1_0} = 0$ za vse $x_0, y_0, z_0 \in \mathcal{A}_0$. Posebej velja, da je

$$(a_{1_0} x_0 b_{1_0}) \mathcal{A}_0 (a_{1_0} x_0 b_{1_0}) \mathcal{A}_0 (a_{1_0} x_0 b_{1_0}) = 0.$$

Iz tega sledi $a_{1_0} x_0 b_{1_0} = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$, saj je \mathcal{A}_0 polpraalgebra. Predpostavimo sedaj, da je $b_{1_1} y_1 b_{1_0} = b_{1_0} y_1 b_{1_1}$ za vsak $y_1 \in \mathcal{A}_1$. S pomočjo leme 1.22 (točka (vi)) vidimo, da je $b_{1_1} y b_{1_0} = b_{1_0} y b_{1_1}$ za vsak $y \in \mathcal{A}$. Po lemi 2.15 je $b_{1_1} = 0$ ali $b_{1_0} = \lambda b_{1_1}$ za nek $\lambda \in C = C_0$, iz česar sledi $b_{1_0} = 0$, saj $\lambda = 0$. V prvem primeru se skličemo na indukcijsko predpostavko, medtem ko v drugem primeru rezultat sledi direktno.

V zadnjem koraku bomo obravnavali primer, ko sta n in m poljubni naravni števili. Predpostavimo, da je $n > 1$ in da je trditev resnična za vsako naravno število manjše od n . Cilj je pokazati, da sta obe strani identitete

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_0 b_{i_0} = \sum_{j=1}^m a_{j_1} x_0 b_{j_1} \quad \text{za vsak } x_0 \in \mathcal{A}_0 \quad (2.7)$$

enaki nič. Zamenjajmo v enakosti (2.7) element $x_0 \in \mathcal{A}_0$ z elementom $x_0 b_{1_0} y_0$, $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$. Potem je

$$\sum_{i=2}^n a_{i_0} x_0 (b_{1_0} y_0 b_{i_0} - b_{i_0} y_0 b_{1_0}) = \sum_{j=1}^m a_{j_1} x_0 (b_{1_0} y_0 b_{j_1} - b_{j_1} y_0 b_{1_0})$$

za vsaka $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$. Glede na indukcijsko predpostavko sta obe strani identitete enaki nič, kar pomeni, da je

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_0 b_{j_1} \right) y_0 b_{1_0} = \sum_{j=1}^m (a_{j_1} x_0 b_{1_0}) y_0 b_{j_1}.$$

Ker trditev drži za $n = 1$, sledi

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_0 b_{j_1} \right) y_0 b_{1_0} = 0 \quad \text{za vsaka } x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0. \quad (2.8)$$

S pomočjo leme 1.22 (točka (v)) vidimo, da je bodisi $b_{1_0} x_1 b_{1_0} = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$ ali $\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_0 b_{j_1} = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Če velja

slednje, smo pokazali želeno. Torej predpostavimo, da je $b_{1_0}x_1b_{1_0} = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem pomnožimo enakost (2.7) z desne strani z elementom $x_1b_{1_0}y_1$, kjer sta $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Sledi

$$\sum_{i=2}^n a_{i_0}x_0(b_{i_0}x_1b_{1_0}y_1) = \sum_{j=1}^m a_{j_1}x_0(b_{j_1}x_1b_{1_0}y_1).$$

Po indukcijski predpostavki je

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{j_1}x_0b_{j_1}x_1b_{1_0}\right)y_1 = 0$$

za vsaka $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Po lemi 1.22 (točka (i)) velja, da je

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{j_1}x_0b_{j_1}\right)x_1b_{1_0} = 0$$

za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Upoštevajmo še identiteto (2.8). Potem je

$$\sum_{j=1}^m (a_{j_1}x_0b_{j_1})\mathcal{A}b_{1_0} = 0.$$

Sledi, da je $\sum_{j=1}^m a_{j_1}x_0b_{j_1} = 0$ ali $b_{1_0} = 0$. Če velja slednje, je

$$\sum_{i=2}^n a_{i_0}x_0b_{i_0} = \sum_{j=1}^m a_{j_1}x_0b_{j_1}.$$

Glede na indukcijsko predpostavko je

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0}x_0b_{i_0} = \sum_{j=1}^m a_{j_1}x_0b_{j_1} = 0.$$

S tem je dokaz leme za primer $k = 0$ zaključen.

Primer 2. Naj bo $k = 1$. Naj bo $n = m = 1$. Torej je

$$a_{1_0}x_1b_{1_0} = a_{1_1}x_1b_{1_1}$$

za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Namesto x_1 pišimo x_1x_0 , $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in pomnožimo identiteto z desne strani z elementom $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je $(a_{1_0}x_1)x_0(b_{1_0}y_1) = (a_{1_1}x_1)x_0(b_{1_1}y_1)$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Če upoštevamo še rezultat za $k = 0$, je $a_{1_0}x_1x_0b_{1_0}y_1 = 0$ za vsak $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Po lemi 1.22 (točka (i)) je $(a_{1_0}x_1)x_0b_{1_0} = 0$. Prav tako ni težko preveriti (leme 1.22 (v)), da je $a_{1_0}x_1 = 0$ ali $b_{1_0}\mathcal{A}_1b_{1_0} = 0$. V

prvem primeru sledi želeno. Torej predpostavimo, da je $b_{1_0}\mathcal{A}_1b_{1_0} = 0$. Potem je

$$\begin{aligned} & (a_{1_0}x_1b_{1_0})\mathcal{A}_1(a_{1_0}x_1b_{1_0})\mathcal{A}_1(a_{1_0}x_1b_{1_0}) \\ &= (a_{1_0}x_1b_{1_0})\mathcal{A}_1(a_{1_1}x_1b_{1_0})\mathcal{A}_1(a_{1_0}x_1b_{1_1}) = 0. \end{aligned}$$

Po lemi 1.22 (točka ii)) je $a_{1_0}x_1b_{1_0} = 0 = a_{1_1}x_1b_{1_1}$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. V nadaljevanju pokažimo, da je trditev resnična za $n = 1$ in poljubni $m > 1$. Obravnavajmo torej enakost

$$a_{1_0}x_1b_{1_0} = \sum_{i=1}^m a_{i_1}x_1b_{i_1} \quad \text{za vsak } x_1 \in \mathcal{A}_1.$$

V pravkar zapisano identiteto pišimo x_1x_0 , $x_0 \in \mathcal{A}_0$, namesto x_1 in jo pomnožimo z desne strani z elementom $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je

$$(a_{1_0}x_1)x_0(b_{1_0}y_1) = \sum_{i=1}^m (a_{i_1}x_1)x_0(b_{i_1}y_1) = 0,$$

$x_0 \in \mathcal{A}_0$, $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Upoštevajmo še rezultat za $k = 0$. Potem je $a_{1_0}x_1x_0b_{1_0}\mathcal{A}_1 = 0$. Po lemi 1.22 (točka (i)) sledi, da je $(a_{1_0}x_1)x_0b_{1_0} = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Glede na lemo 1.22 (točka (v)) je $a_{1_0}x_1 = 0$ ali $b_{1_0}\mathcal{A}_1b_{1_0} = 0$. Iz prve enakosti sledi želeno. Predpostavimo, da je $b_{1_0}\mathcal{A}_1b_{1_0} = 0$. Potem je

$$\begin{aligned} & (a_{1_0}x_1b_{1_0})y_1(a_{1_0}x_1b_{1_0})z_1(a_{1_0}x_1b_{1_0}) \\ &= (a_{1_0}x_1b_{1_0})y_1\left(\sum_{i=1}^m a_{i_1}(x_1b_{1_0}z_1a_{1_0}x_1)b_{i_1}\right) = 0 \end{aligned}$$

za vsaka $y_1, z_1 \in \mathcal{A}_1$. S pomočjo leme 1.22 (točka (ii)) lahko hitro vidimo, da je $a_{1_0}x_1b_{1_0} = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$.

Naj bosta sedaj n in m poljubni naravni števili. V identiteti

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0}x_1b_{i_0} = \sum_{j=1}^m a_{j_1}x_1b_{j_1} \quad \text{za vsak } x_1 \in \mathcal{A}_1 \quad (2.9)$$

zamenjajmo x_1 z elementom $x_1b_{1_0}y_0$, $y_0 \in \mathcal{A}_0$. Dobimo

$$\sum_{i=2}^n a_{i_0}x_1(b_{1_0}y_0b_{i_0} - b_{i_0}y_0b_{1_0}) = \sum_{j=1}^m a_{j_1}x_1(b_{1_0}y_0b_{j_1} - b_{j_1}y_0b_{1_0})$$

za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Po indukcijski predpostavki sta obe strani enaki nič. To pomeni, da je

$$\sum_{j=1}^m (a_{j_1}x_1b_{j_1})y_0b_{1_0} = \sum_{j=1}^m (a_{j_1}x_1b_{1_0})y_0b_{j_1}$$

in zato je

$$\sum_{j=1}^m (a_{j_1} x_1 b_{j_1}) y_0 (b_{1_0} z_1) = \sum_{j=1}^m (a_{j_1} x_1 b_{1_0}) y_0 (b_{j_1} z_1)$$

za vsak $z_1 \in \mathcal{A}_1$. Ponovno upoštevajmo dokazano trditev za $k = 0$, iz česar sledi, da je $(\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_1 b_{j_1}) \mathcal{A}_0 b_{1_0} \mathcal{A}_1 = 0$. Po lemi 1.22 (točka (i)) je

$$(\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_1 b_{j_1}) \mathcal{A}_0 b_{1_0} = 0.$$

Glede na lemo 1.22 (točka (v)) je

$$\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_1 b_{j_1} = 0 \text{ ali } b_{1_0} \mathcal{A}_1 b_{1_0} = 0.$$

V prvem primeru je dokaz zaključen. Predpostavimo torej, da je $b_{1_0} \mathcal{A}_1 b_{1_0} = 0$. Pomnožimo enakost (2.9) z elementom $z_1 b_{1_0} y_1$, $y_1, z_1 \in \mathcal{A}_1$. Sledi

$$\sum_{i=2}^n a_{i_0} x_1 (b_{i_0} z_1 b_{1_0} y_1) = \sum_{j=1}^m a_{j_1} x_1 (b_{j_1} z_1 b_{1_0} y_1).$$

Po indukcijski predpostavki sta obe strani enaki nič. Glede na lemo 1.22 (točka (i)) sledi, da je

$$(\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_1 b_{j_1}) \mathcal{A}_1 b_{1_0} = 0$$

in zato je

$$(\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_1 b_{j_1}) \mathcal{A} b_{1_0} = 0.$$

Ker je \mathcal{A} polpraalgebra, lahko zaključimo, da je

$$\sum_{j=1}^m a_{j_1} x_1 b_{j_1} = 0 \text{ ali } b_{1_0} = 0.$$

V prvem primeru sledi zeleni rezultat direktno, v drugem primeru pa upoštevamo indukcijsko predpostavko.

S tem je dokaz zaključen. □

S pomočjo pravkar pokazane leme bomo dokazali naslednji izrek.

Izrek 2.18. Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra in naj bodo $a_i = a_{i_0} + a_{i_1}$ ter $b_i = b_{i_0} + b_{i_1}$ elementi algebre \mathcal{A} . Naj bo $k = 0$ ali $k = 1$. Predpostavimo, da je

$$\sum_{i=1}^n a_i x_k b_i = 0 \text{ za vsak } x_k \in \mathcal{A}_k.$$

(i) Naj bo $C_1 = 0$. Potem je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_0} &= \sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k b_{i_0} = \sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k b_{i_1} = 0 \end{aligned}$$

za vsak $x_k \in \mathcal{A}_k$.

(ii) Naj bo $C_1 \neq 0$. Potem je $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Velja še več, če je $b_1 \neq 0$, potem obstajajo taki elementi $\lambda_{i_0} \in C_0$ in $\mu_{i_1} \in C_1$, ne vsi nič, da je $\sum_{i=1}^n (\lambda_{i_0} a_{i_0} + \mu_{i_1} a_{i_1}) = 0$.

Dokaz. (i) Iz enakosti $\sum_{i=1}^n a_i x_k b_i = 0$, $x_k \in \mathcal{A}_k$, sledi, da je

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_0} + \sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k b_{i_1} = 0 \text{ za vsak } x_k \in \mathcal{A}_k, \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_1} + \sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k b_{i_0} = 0 \text{ za vsak } x_k \in \mathcal{A}_k. \quad (2.11)$$

S pomočjo leme 2.17 in identitete (2.10) vidimo, da je

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_0} = \sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k b_{i_1} = 0$$

za vsak $x_k \in \mathcal{A}_k$. Pomnožimo enakost (2.11) na desni strani s poljubnim elementom $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k (b_{i_1} y_1) + \sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k (b_{i_0} y_1) = 0$$

za vsak $x_k \in \mathcal{A}_k$. Upoštevajmo, da je $b_{i_1} y_1 \in \mathcal{A}_0$ in $b_{i_0} y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem po lemi 2.17 sledi

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_1} \right) y_1 = \left(\sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k b_{i_0} \right) y_1 = 0$$

za vsak $x_k \in \mathcal{A}_k$ ter $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Glede na lemo 1.22 (točka (i)) je

$$\sum_{i=1}^n a_{i_0} x_k b_{i_1} = \sum_{i=1}^n a_{i_1} x_k b_{i_0} = 0$$

za vsak $x_k \in \mathcal{A}_k$. S tem smo pokazali želeno.

(ii) Obravnavali bomo samo primer, ko je $k = 0$, saj dokaz za $k = 1$ poteka na podoben način. Naj bo $0 \neq \lambda_1 \in C_1$ in naj bo \mathcal{I} tak bistven gradiran ideal algebre \mathcal{A} , da je $\lambda_1 \mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$. Ker je $\lambda_1 x_1 \in \mathcal{A}_0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{I}_1$, je $\sum_{i=1}^n a_i \lambda_1 x_1 b_i = 0$. Po drugi strani pa vidimo, da je $\sum_{i=1}^n a_i \lambda_1 x_0 b_i = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{I}_0$. Potem je $\lambda_1 (\sum_{i=1}^n a_i x b_i) = 0$ za vsak $x \in \mathcal{I}$. Po lemi 2.14 sledi, da je $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$ za vsak $x \in \mathcal{I}$. Iz tega izpeljemo, da je

$$\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0 \quad \text{za vsak } x \in \mathcal{A}$$

(glej npr. [2, trditev 2.1.10 in izrek 6.4.1]). To pomeni, da je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i_0} x b_{i_0} + \sum_{i=1}^n a_{i_1} x b_{i_1} &= 0 \quad \text{in} \\ \sum_{i=1}^n a_{i_0} x b_{i_1} + \sum_{i=1}^n a_{i_1} x b_{i_0} &= 0 \end{aligned}$$

za vsak $x \in \mathcal{A}$. Ker je po predpostavki $b_1 \neq 0$, je $b_{1_0} \neq 0$ ali $b_{1_1} \neq 0$. V obeh primerih nam izrek 2.16 zagotavlja obstoj takih elementov $\lambda_i, \mu_i \in C$, ki niso vsi enaki nič, da je $\sum_{i=1}^n (\lambda_i a_{i_0} + \mu_i a_{i_1}) = 0$. Pišimo $\lambda_i = \lambda_{i_0} + \lambda_{i_1}$, $\mu_i = \mu_{i_0} + \mu_{i_1}$, $\lambda_{i_0}, \mu_{i_0} \in C_0$, $\lambda_{i_1}, \mu_{i_1} \in C_1$. Po predpostavki je vsaj eden izmed elementov $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \mu_{i_0}$ in μ_{i_1} neničeln. Velja še več, C_1 vsebuje neničelni element, ki je po lemi 2.14 obrnljiv. Če pomnožimo identiteto $\sum_{i=1}^n (\lambda_i a_{i_0} + \mu_i a_{i_1}) = 0$ s tem elementom, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je vsaj eden izmed elementov λ_{i_0}, μ_{i_1} neničeln. Torej je $\sum_{i=1}^n (\lambda_{i_0} a_{i_0} + \mu_{i_1} a_{i_1}) = 0$.

□

Posledica 2.19. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra in naj bodo $a_i, b_i, c_j, d_j \in \mathcal{A}$ homogeni elementi. Predpostavimo, da je $|a_{i_1}| = |a_{i_2}| \neq |c_{j_1}| = |c_{j_2}|$, $|b_{i_1}| = |b_{i_2}| \neq |d_{j_1}| = |d_{j_2}|$ za vse i_1, i_2, j_1, j_2 in*

$$\sum_{i=1}^n a_i x b_i + \sum_{j=1}^m c_j x^\sigma d_j = 0 \quad \text{za vsak } x \in \mathcal{A}.$$

Potem je

$$\sum_{i=1}^n a_i x b_i = \sum_{j=1}^m c_j x d_j = 0 \quad \text{za vsak } x \in \mathcal{A}.$$

Dokaz. Predpostavko lahko zapišemo kot

$$\sum_{i=1}^n a_i x_0 b_i + \sum_{j=1}^m c_j x_0 d_j = 0 \quad \text{za vsak } x_0 \in \mathcal{A}_0, \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_1 b_i - \sum_{j=1}^m c_j x_1 d_j = 0 \quad \text{za vsak } x_1 \in \mathcal{A}_1. \quad (2.13)$$

Naj bo $C_1 = 0$. Potem po izreku 2.18 (točka (i)) sledi $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = \sum_{j=1}^m c_j x d_j = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.

V nadaljevanju predpostavimo, da je $C_1 \neq 0$. S pomočjo izreka 2.18 (točka (ii)) vidimo, da iz enakosti (2.12) in (2.13) sledi

$$\sum_{i=1}^n a_i x b_i + \sum_{j=1}^m c_j x d_j = 0$$

ter

$$\sum_{i=1}^n a_i x b_i - \sum_{j=1}^m c_j x d_j = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{A}$. Iz tega lahko zaključimo, da je $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = \sum_{j=1}^m c_j x d_j = 0$. S tem smo pokazali želeno. \square

Produkt superodvajanj

V nadaljevanju bomo obravnavali produkt superodvajanj na asociativnih pra-superalgebrah. Pokazali smo že (izrek 2.7), da produkt dveh neničelnih odvajanj na praalgebri ni odvajanje. Naravno se postavi vprašanje, ali velja podoben rezultat v primeru superodvajanj na pra-superalgebrah. Kaj hitro vidimo, da je produkt dveh superodvajanj stopnje 1 na pra-superalgebri superodvajanje stopnje 0. To pomeni, da ne moremo pričakovati, da produkt dveh superodvajanj ne more biti superodvajanje. Zapišimo posplošitev Posnerjevega izreka.

Izrek 2.20. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra in naj bosta $d = d_0 + d_1$ in $g = g_0 + g_1$ neničelni superodvajanja na \mathcal{A} . Potem je dg superodvajanje natanko tedaj, ko je $d_0 = g_0 = 0$ in $g_1 = \lambda_0 d_1$ za nek neničelni $\lambda_0 \in C_0$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je dg superodvajanje na algebri \mathcal{A} . Potem je $d_0 g_0 + d_1 g_1$ superodvajanje stopnje 0 in $d_0 g_1 + d_1 g_0$ superodvajanje stopnje 1. Obravnavajmo element $(d_0 g_0 + d_1 g_1)(xy)$,

$x, y \in \mathcal{A}$. Po eni strani je

$$\begin{aligned}
 (d_0g_0 + d_1g_1)(xy) &= d_0g_0(xy) + d_1g_1(xy) \\
 &= d_0(g_0(x)y) + d_0(xg_0(y)) + d_1(g_1(x)y) \\
 &\quad + d_1(x^\sigma g_1(y)) \\
 &= d_0(g_0(x))y + g_0(x)d_0(y) + d_0(x)g_0(y) \\
 &\quad + x(d_0g_0)(y) \\
 &\quad + d_1(g_1(x))y + g_1(x)^\sigma d_1(y) + d_1(x^\sigma)g_1(y) \\
 &\quad + x(d_1g_1)(y).
 \end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned}
 (d_0g_0 + d_1g_1)(xy) &= (d_0g_0 + d_1g_1)(x)y + x(d_0g_0 + d_1g_1)(y) \\
 &= (d_0g_0)(x)y + (d_1g_1)(x)y + x(d_0g_0)(y) \\
 &\quad + x(d_1g_1)(y).
 \end{aligned}$$

Če primerjamo obe enakosti, opazimo, da je

$$\begin{aligned}
 &g_0(x)d_0(y) + d_0(x)g_0(y) \\
 &+ g_1(x)^\sigma d_1(y) - d_1(x)^\sigma g_1(y) = 0 \qquad (2.14)
 \end{aligned}$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Na podoben način obravnavamo element $(d_0g_1 + d_1g_0)(xy)$. Po eni strani je

$$\begin{aligned}
 (d_0g_1 + d_1g_0)(xy) &= d_0g_1(xy) + d_1g_0(xy) \\
 &= d_0(g_1(x)y) + d_0(x^\sigma g_1(y)) + d_1(g_0(x)y) \\
 &\quad + d_1(xg_0(y)) \\
 &= d_0(g_1(x))y + g_1(x)d_0(y) + d_0(x^\sigma)g_1(y) \\
 &\quad + x^\sigma d_0(g_1(y)) + d_1(g_0(x))y + g_0(x)^\sigma d_1(y) \\
 &\quad + d_1(x)g_0(y) + x^\sigma d_1(g_0(y)),
 \end{aligned}$$

po drugi strani pa je

$$\begin{aligned}
 (d_0g_1 + d_1g_0)(xy) &= (d_0g_1 + d_1g_0)(x)y + x^\sigma(d_0g_1 + d_1g_0)(y) \\
 &= (d_0g_1)(x)y + (d_1g_0)(x)y \\
 &\quad + x^\sigma(d_0g_1)(y) + x^\sigma(d_1g_0)(y).
 \end{aligned}$$

S pomočjo obeh identitet pridemo do enakosti

$$\begin{aligned} g_1(x)d_0(y) + d_0(x)^\sigma g_1(y) \\ + g_0(x)^\sigma d_1(y) + d_1(x)g_0(y) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Zamenjajmo v identitetah (2.14) in (2.15) element y z elementom yz , $z \in \mathcal{A}$. Ni težko videti, da je potem

$$\begin{aligned} g_0(x)yd_0(z) + d_0(x)yg_0(z) + g_1(x)^\sigma y^\sigma d_1(z) - d_1(x)^\sigma y^\sigma g_1(z) = 0 \\ g_1(x)yd_0(z) + d_0(x)^\sigma y^\sigma g_1(z) + g_0(x)^\sigma y^\sigma d_1(z) + d_1(x)yg_0(z) = 0 \end{aligned}$$

za vse $x, y, z \in \mathcal{A}$. Glede na posledico 2.19 sledi

$$g_0(x)yd_0(z) + d_0(x)yg_0(z) = 0, \quad (2.16)$$

$$g_1(x)^\sigma yd_1(z) - d_1(x)^\sigma yg_1(z) = 0, \quad (2.17)$$

$$g_1(x)yd_0(z) + d_1(x)yg_0(z) = 0, \quad (2.18)$$

$$d_0(x)^\sigma yg_1(z) + g_0(x)^\sigma yd_1(z) = 0 \quad (2.19)$$

za vsak $y \in \mathcal{A}$ in poljubna homogena elementa $x, z \in \mathcal{A}$.

Po enakosti (2.16) je

$$\begin{aligned} (g_0(x)yd_0(z))wd_0(u) &= -d_0(x)y(g_0(z)wd_0(u)) \\ &= d_0(x)(yd_0(z)w)g_0(u) = -g_0(x)yd_0(z)wd_0(u), \end{aligned}$$

in zato je $g_0(x)yd_0(z)wd_0(u) = 0$ za vse $x, y, z, w, u \in \mathcal{A}$. Posebej velja

$$(g_0(x)\mathcal{A}d_0(z))\mathcal{A}(g_0(x)\mathcal{A}d_0(z)) = 0.$$

Ker je \mathcal{A} polpraalgebra, sledi $g_0(x)\mathcal{A}d_0(z) = 0$ za vsaka $x, z \in \mathcal{A}$. Predpostavimo, da je superodvajanje d_0 različno od 0. Potem obstaja tak homogen element $z \in \mathcal{A}$, da je $d_0(z) \neq 0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, iz enakosti $g_0(x)\mathcal{A}d_0(z) = 0$, $x, z \in \mathcal{A}$, sledi $g_0 = 0$. Ker je po predpostavki $g \neq 0$, je $g_1 \neq 0$. S pomočjo relacije (2.18) vidimo, da je

$$\begin{aligned} (g_1(x)yd_0(z))wd_0(u) &= -d_0(x)y(g_1(z)wd_0(u)) \\ &= d_0(x)(yd_0(z)w)g_1(u) = -g_1(x)yd_0(z)wd_0(u) \end{aligned}$$

in zato je $g_1(x)yd_0(z)wd_0(u) = 0$ za vse $x, y, z, w, u \in \mathcal{A}$. Posebej velja

$$(g_1(x)\mathcal{A}d_0(z))\mathcal{A}(g_1(x)\mathcal{A}d_0(z)) = 0,$$

iz česar sledi $g_1(x)\mathcal{A}d_0(z) = 0$. To pa je v nasprotju s tem, da je $d_0 \neq 0$ in $g_1 \neq 0$. S tem smo pokazali, da je $d_0 = 0$ in podobno $g_0 = 0$. Sledi $d_1 \neq 0$ ter $g_1 \neq 0$. Naj bo $x \in \mathcal{A}$ tak homogen element, da je $d_1(x) \neq 0$. Glede na enakost (2.17) je $d_1(x)yg_1(x) = g_1(x)yd_1(x)$ za vsak $y \in \mathcal{A}$. Lema 2.15 nam zagotavlja obstoj takega elementa $\lambda_0 \in C$, da je $g_1(x) = \lambda_0 d_1(x)$. Velja še več, λ_0 pripada sodemu delu razširjenega centroida C , saj sta elementa $g_1(x)$ in $d_1(x)$ iste stopnje. Vidimo, da lahko potem enakost (2.17) zapišemo kot $d_1(x)\mathcal{A}(g_1(z) - \lambda_0 d_1(z)) = 0$ za vsak $z \in \mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je $g_1(z) = \lambda_0 d_1(z)$ za vsak $z \in \mathcal{A}$, saj je \mathcal{A} pra-superalgebra. Velja še več, $\lambda_0 \neq 0$, saj je $g_1 \neq 0$.

Predpostavimo, da je $d_0 = g_0 = 0$ in $g_1 = \lambda_0 d_1$ za nek neničelni $\lambda_0 \in C_0$. Potem očitno sledi, da je dg superodvajanje. S tem je dokaz zaključen. \square

Super-biodvajanja

Pokazali smo že (izrek 2.9), da je vsako biodvajanje B na nekomutativni praalgebri oblike $B(x, y) = \lambda[x, y]$, kjer je λ element razširjenega centroida praalgebre. Ob tem se naravno zastavlja vprašanje o karakterizaciji super-biodvajanja na pra-superalgebri. Tako bomo v nadaljevanju podali rezultat, ki je posplošitev izreka o karakterizaciji biodvajanj na praalgebrah. Najprej zapišimo definicijo super-biodvajanja.

Definicija 2.21. *Naj bo \mathcal{A} superalgebra. Bilinearna preslikava $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ je super-biodvajanje, če velja:*

- (i) *za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$ sta preslikavi $x \mapsto B(x_0, x)$ in $x \mapsto B(x, x_0)$ superodvajanji stopnje 0;*
- (ii) *za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$ sta preslikavi $x \mapsto B(x_1, x)$ in $x \mapsto B(x, x_1)$ superodvajanji stopnje 1.*

Preslikava $x \mapsto B(x, x_1)^\sigma$ je superodvajanje stopnje 1, če je

$$B(xy, x_1) = B(x, x_1)y^\sigma + xB(y, x_1) \quad \text{za vsaka } x, y \in \mathcal{A}.$$

Izrek 2.22. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra, ki ni superkomutativna. Če je B super-biodvajanje na \mathcal{A} , potem obstaja tak element $\lambda_0 \in C_0$, da je $B(x, y) = \lambda_0[x, y]_s$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. Naj bodo $x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1, z = z_0 + z_1$ in $v = v_0 + v_1$ elementi superalgebre \mathcal{A} . Oglejmo si izraz $B(xy, zv)$. Potem je

$$\begin{aligned}
& B(xy, zv) \\
&= B(x_0y_0 + x_1y_1, zv) + B(x_0y_1 + x_1y_0, zv) \\
&= B(x_0y_0 + x_1y_1, z)v + zB(x_0y_0 + x_1y_1, v) \\
&+ B(x_0y_1 + x_1y_0, z)v + z^\sigma B(x_0y_1 + x_1y_0, v) \\
&= B(x_0, z_0)y_0v + x_0B(y_0, z_0)v + B(x_1, z_0)y_1v + x_1B(y_1, z_0)v \\
&+ B(x_0, z_1)y_0v + x_0B(y_0, z_1)v - B(x_1, z_1)y_1v + x_1B(y_1, z_1)v \\
&+ zB(x_0, v_0)y_0 + zx_0B(y_0, v_0) + zx_1B(y_1, v_0) + zB(x_1, v_0)y_1 \\
&+ zB(x_0, v_1)y_0 + zx_0B(y_0, v_1) + zx_1B(y_1, v_1) - zB(x_1, v_1)y_1 \\
&+ x_0B(y_1, z_0)v + B(x_0, z_0)y_1v + B(x_1, z_0)y_0v + x_1B(y_0, z_0)v \\
&+ x_0B(y_1, z_1)v - B(x_0, z_1)y_1v + B(x_1, z_1)y_0v + x_1B(y_0, z_1)v \\
&+ z^\sigma x_0B(y_1, v_0) + z^\sigma B(x_0, v_0)y_1 + z^\sigma x_1B(y_0, v_0) + z^\sigma B(x_1, v_0)y_0 \\
&+ z^\sigma x_0B(y_1, v_1) - z^\sigma B(x_0, v_1)y_1 + z^\sigma B(x_1, v_1)y_0 + z^\sigma x_1B(y_0, v_1).
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa ni težko preveriti, da je

$$\begin{aligned}
& B(xy, zv) \\
&= B(xy, z_0v_0 + z_1v_1) + B(xy, z_0v_1 + z_1v_0) \\
&= B(x, z_0v_0 + z_1v_1)y + xB(y, z_0v_0 + z_1v_1) \\
&+ B(x, z_0v_1 + z_1v_0)y^\sigma + xB(y, z_0v_1 + z_1v_0) \\
&= B(x_0, z_0)v_0y + z_0B(x_0, v_0)y + B(x_0, z_1)v_1y + z_1B(x_0, v_1)y \\
&+ B(x_1, z_0)v_0y + z_0B(x_1, v_0)y + B(x_1, z_1)v_1y - z_1B(x_1, v_1)y \\
&+ xB(y_0, z_0)v_0 + xz_0B(y_0, v_0) + xB(y_0, z_1)v_1 + xz_1B(y_0, v_1) \\
&+ xB(y_1, z_0)v_0 + xz_0B(y_1, v_0) + xB(y_1, z_1)v_1 - xz_1B(y_1, v_1) \\
&+ B(x_0, z_0)v_1y^\sigma + z_0B(x_0, v_1)y^\sigma + B(x_0, z_1)v_0y^\sigma + z_1B(x_0, v_0)y^\sigma \\
&+ B(x_1, z_0)v_1y^\sigma + z_0B(x_1, v_1)y^\sigma + B(x_1, z_1)v_0y^\sigma - z_1B(x_1, v_0)y^\sigma \\
&+ xz_0B(y_0, v_1) + xB(y_0, z_0)v_1 + xB(y_0, z_1)v_0 + xz_1B(y_0, v_0) \\
&+ xz_0B(y_1, v_1) + xB(y_1, z_0)v_1 + xB(y_1, z_1)v_0 - xz_1B(y_1, v_0).
\end{aligned}$$

Če primerjamo zgornji dve enakosti, vidimo, da je

$$\begin{aligned}
& B(x, z_0)[y, v]_s + B(x, z_1)[y^\sigma, v]_s \\
&= [x, z^\sigma]_s B(y_1, v) + [x, z]_s B(y_0, v)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

za vse $x, y, z, v \in \mathcal{A}$. Naj bosta $y_1 = z_1 = 0$. Potem iz pravkar zapisane enakosti (2.20) sledi $B(x, z_0)[y_0, v] = [x, z_0]B(y_0, v)$ za vse $x, v \in \mathcal{A}$, $z_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$. Zamenjajmo v tej identiteti element v z elementom wv , $w \in \mathcal{A}$. Pri tem upoštevajmo, da je $[y_0, wv] = [y_0, w]v + w[y_0, v]$ in $B(y_0, wv) = B(y_0, w)v + wB(y_0, v)$. Potem je

$$B(x, z_0)w[y_0, v] = [x, z_0]wB(y_0, v) \quad (2.21)$$

za vse $x, v, w \in \mathcal{A}$, $y_0, z_0 \in \mathcal{A}_0$. Na podoben način, če je $y_0 = z_0 = 0$, glede na enakost (2.20) sledi $B(x, z_1)[y_1, v]_s = [x, z_1]_s B(y_1, v)$ za vse $x, v \in \mathcal{A}$, $z_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Ponovno z zamenjavo elementa v z elementom $w^\sigma v$, $w \in \mathcal{A}$, pridemo do enakosti

$$B(x, z_1)w[y_1, v]_s = [x, z_1]_s wB(y_1, v) \quad (2.22)$$

za vse $x, v, w \in \mathcal{A}$, $y_1, z_1 \in \mathcal{A}_1$.

Predpostavimo najprej, da je $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1] \neq 0$. Potem obstajata taka elementa $a_0 \in \mathcal{A}_0$ in $a_1 \in \mathcal{A}_1$, da je $[a_1, a_0] \neq 0$. Glede na identiteto (2.21) je $B(a_1, a_0)w[a_1, a_0] + [a_1, a_0]wB(a_0, a_1) = 0$ za vsak $w \in \mathcal{A}$. S pomočjo izreka 2.16 sledi, da sta $B(a_1, a_0)$ in $[a_1, a_0]$ linearno odvisna elementa nad razširjenim centroidom C . Velja še več, ker je $[a_1, a_0] \neq 0$ in sta oba elementa homogena stopnje 1, obstaja tak $\lambda_0 \in C_0$, da je $B(a_1, a_0) = \lambda_0[a_1, a_0]$. Iz tega sledi, da je $[a_1, a_0]w(B(a_0, a_1) + \lambda_0[a_1, a_0]) = 0$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra in je $[a_1, a_0] \neq 0$, je $B(a_0, a_1) = -\lambda_0[a_1, a_0]$. Glede na enakosti (2.21) in (2.22) sledi, da je

$$\begin{aligned} [a_1, a_0]\mathcal{A}(B(y_0, v) - \lambda_0[y_0, v]) &= 0 \quad \text{ter} \\ [a_1, a_0]\mathcal{A}(B(y_1, v) - \lambda_0[y_1, v]_s) &= 0. \end{aligned}$$

Potem očitno sledi, da je

$$B(y_0, v) = \lambda_0[y_0, v] \quad \text{in} \quad B(y_1, v) = \lambda_0[y_1, v]_s.$$

Zapisano drugače, $B(y, v) = \lambda_0[y, v]_s$ za vsaka $y, v \in \mathcal{A}$.

V nadaljevanju predpostavimo, da je $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1] = 0$. Po lemi 1.22 (točka (vii)) je \mathcal{A} bodisi komutativna kot algebra bodisi trivialna superalgebra. Če velja slednje, je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ nekomutativna algebra, saj algebra \mathcal{A} po predpostavki ni superkomutativna ($[\mathcal{A}, \mathcal{A}_0] \neq 0$).

Potem želeni rezultat sledi po izreku 2.9. Po drugi strani pa rezultat sledi iz enakosti (2.21), pri čemer uporabimo podoben argument kot zgoraj. Torej smemo predpostaviti, da je algebra \mathcal{A} komutativna. Naj bo $z_1 = 0$. Glede na enakost (2.20) sledi, da je $B(x, z_0)[y, v]_s = 0$ za vse $x, y, v \in \mathcal{A}$ in $z_0 \in \mathcal{A}_0$. Potem je $B(x, z_0)\mathcal{A}[y, v]_s = 0$, pri čemer upoštevamo komutativnost algebre \mathcal{A} . Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, ki ni superkomutativna, sledi $B(x, z_0) = 0$ za vse $x \in \mathcal{A}$ in $z_0 \in \mathcal{A}_0$. Naj bo sedaj $y_1 = 0$. Po enakosti (2.20) velja $[x, z]_s B(y_0, v) = 0$ za vse $v, x, z \in \mathcal{A}_0$ in $y_0 \in \mathcal{A}_0$. Ponovno upoštevamo predpostavko, da algebra \mathcal{A} ni superkomutativna, iz česar sledi $B(y_0, v) = 0$ za vse $v \in \mathcal{A}$ in $y_0 \in \mathcal{A}_0$. S tem smo pokazali

$$B(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0) = B(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}) = 0.$$

Glede na relacijo (2.22) je

$$B(x_1, z_1)w[y_1, v_1]_s = [x_1, z_1]_s wB(y_1, v_1) \quad (2.23)$$

za vse $x_1, z_1, y_1, v_1 \in \mathcal{A}_1$, $w \in \mathcal{A}$. Ker je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]_s \neq 0$, obstajata taka elementa $a_1, b_1 \in \mathcal{A}_1$, da je $[a_1, b_1]_s \neq 0$. Potem je $B(a_1, b_1)w[a_1, b_1]_s = [a_1, b_1]_s wB(a_1, b_1)$, iz česar po lemi 2.15 sledi $B(a_1, b_1) = \lambda_0[a_1, b_1]_s$ za nek $\lambda_0 \in C_0$. Glede na identiteto (2.23) je $B(x_1, z_1)w[a_1, b_1]_s = [x_1, z_1]_s w\lambda_0[a_1, b_1]_s$ in zato je

$$(B(x_1, z_1) - \lambda_0[x_1, z_1]_s)w[a_1, b_1]_s = 0$$

za vse $x_1, z_1 \in \mathcal{A}_1$, $w \in \mathcal{A}$. Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra in je $[a_1, b_1]_s \neq 0$, sledi $B(x_1, z_1) = \lambda_0[x_1, z_1]_s$ za vsaka $x_1, z_1 \in \mathcal{A}_1$. S tem smo pokazali želeno. \square

Funkcijska identiteta v superalgebrah

Konec tega poglavja bomo namenili posplošitvi izreka 2.11 o karakterizaciji aditivnih komutirajočih preslikav na praalgebrah na področje superalgeber. Obravnavali bomo preslikavo f na pra-superalgebri \mathcal{A} , za katero velja $f(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$, $f(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$ in $[f(x), y]_s = [x, f(y)]_s$, $x, y \in \mathcal{A}$.

Izrek 2.23. *Naj bo \mathcal{A} asociativna pra-superalgebra. Predpostavimo, da je preslikava $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ taka, da je $f(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$, $f(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$ in $[f(x), y]_s = [x, f(y)]_s$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Potem obstaja $\lambda_0 \in C_0$ in taka preslikava $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow C_0$, da je $f(x) = \lambda_0 x + \mu_0(x)$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. Dokaz poteka na podoben način kot dokaz izreka 2.11. Ni težko preveriti, da je

$$B(x, y) = [f(x), y]_s = [x, f(y)]_s$$

super-biodvajanje. V primeru, ko je superalgebra \mathcal{A} superkomutativna, je po lemi 1.22 (točka (viii)) $\mathcal{A}_1 = 0$, \mathcal{A} pa je komutativna. Potem izberemo na primer $\lambda_0 = 0$ ter $\mu_0 = f$ in dokaz je končan.

V nadaljevanju predpostavimo, da \mathcal{A} ni superkomutativna. Glede na izrek 2.22 obstaja tak $\lambda_0 \in C_0$, da je $[f(x), y]_s = \lambda_0[x, y]_s$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. To pomeni, da je $[f(x) - \lambda_0 x, \mathcal{A}]_s = 0$. Naj bo $x \in \mathcal{A}$ in $u = f(x) - \lambda_0 x \in \overline{\mathcal{A}}$. Vidimo, da je $[u_0, \mathcal{A}]_s = 0$ ter $[u_1, \mathcal{A}]_s = 0$. Prvo enakost lahko pišemo kot $[u_0, \mathcal{A}] = 0$, kar pomeni, da je $u_0 \in C_0$. Glede na drugo identiteto je $u_1 x_1 + x_1 u_1 = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Razmislimo, da je potem tudi $u_1^2 = 0$ in zato je $u_1 \mathcal{A}_1 u_1 = 0$, saj je $u_1 [u_1, \mathcal{A}_1]_s = 0$. Če je $u_1 \in \mathcal{A}_1$, po lemi 1.22 (točka (ii)) sledi $u_1 = 0$. Predpostavimo, da je $u_1 \notin \mathcal{A}$. Potem obstaja tak bistven gradiran ideal \mathcal{I} algebre \mathcal{A} , da je $\mathcal{I}u_1 \subseteq \mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je $\mathcal{I}_0 u_1 \mathcal{A}_1 \mathcal{I}_0 u_1 \subseteq \mathcal{I}_0 u_1 \mathcal{A}_1 u_1 = 0$. Po lemi 1.22 (točka (ii)) sledi $\mathcal{I}_0 u_1 = 0$. Prav tako opazimo, da je $\mathcal{I}_1 u_1 \mathcal{A}_0 \mathcal{I}_1 u_1 \subseteq \mathcal{I}_1 u_1 \mathcal{A}_1 u_1 = 0$. Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, je $\mathcal{I}_1 u_1 = 0$. Torej je $\mathcal{I}u_1 = 0$, iz česar sledi, da je $u_1 = 0$. S tem smo pokazali, da je $u = u_0 \in C_0$. To pomeni, da preslikava $\mu_0 : x \mapsto f(x) - \lambda_0 x$ slika iz superalgebre \mathcal{A} v sodi del razširjenega centroida C_0 . Dokaz je zaključen. \square

3 Jordanske preslikave

V tem poglavju se bomo posvetili obravnavi jordanskih preslikav algeber, superalgeber in gradiranih algeber. Že Herstein se je pred približno petdesetimi leti ukvarjal z vprašanjem povezave med homomorfizmi oziroma odvajanji asociativne algebre \mathcal{A} in homomorfizmi oziroma odvajanji jordanske algebre \mathcal{A}^+ . Ob tem se naravno postavi vprašanje, ali so rezultati v zvezi z jordanskimi preslikavami na superalgebrah oziroma gradiranih algebrah analogni.

Poglavje je razdeljeno na dva dela. V prvem delu bomo predstavili klasičen Hersteinov rezultat o jordanskih homomorfizmih algeber in posplošitev tega izreka na jordanske superhomomorfizme superalgeber ter jordanske ϵ -homomorfizme gradiranih algeber. V drugem sklopu tega poglavja pa se bomo posvetili jordanskim odvajanjem algeber in razširitvi Hersteinovega rezultata na jordanska superodvajanja superalgeber ter jordanska ϵ -odvajanja gradiranih algeber. Poglavje je v večji meri povzeto po člankih [18, 20, 22].

3.1 Jordanski superhomomorfizmi

V tem razdelku bomo predstavili rezultate o jordanskih homomorfizmih algeber in jordanskih superhomomorfizmih superalgeber. Najprej zapišimo definicijo jordanskega homomorfizma.

Definicija 3.1. *Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} asociativni algebri. Jordanski homomorfizem je Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, če je*

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y), \quad x, y \in \mathcal{B}.$$

Homomorfizmi in antihomomorfizmi so primeri jordanskih homomorfizmov. Naravno se poraja vprašanje: pod katerimi pogoji velja obratna zveza? Klasičen Hersteinov izrek poda odgovor na to vprašanje.

Izrek 3.2. [33] Naj bo \mathcal{A} praalgebra, \mathcal{B} algebra in $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ surjektivni jordanski homomorfizem. Potem je φ homomorfizem ali antihomomorfizem.

Kasneje je Brešar v članku [5] posplošil ta rezultat na polpraalgebre.

Izrek 3.3. [5] Naj bo \mathcal{A} polpraalgebra, \mathcal{B} algebra in $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ surjektivni jordanski homomorfizem. Potem obstajata taka ideala \mathcal{U} in \mathcal{V} algebre \mathcal{B} , da je $\varphi(ux) = \varphi(u)\varphi(x)$ in $\varphi(vx) = \varphi(x)\varphi(v)$ za vse $x \in \mathcal{B}$, $u \in \mathcal{U}$ ter $v \in \mathcal{V}$. Še več, ideal $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ je bistven ideal algebre \mathcal{B} , $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \text{Ker}\varphi$, $\varphi(\mathcal{U})$ in $\varphi(\mathcal{V})$ sta ideala algebre \mathcal{A} , $\varphi(\mathcal{U}) \cap \varphi(\mathcal{V}) = 0$ in $\varphi(\mathcal{U}) \oplus \varphi(\mathcal{V})$ je bistven ideal algebre \mathcal{A} . Če je $\mathcal{U} = \text{Ker}\varphi$, je φ antihomomorfizem. Če je $\mathcal{V} = \text{Ker}\varphi$, je φ homomorfizem.

V nadaljevanju bomo predstavili posplošitev klasičnega Hersteinevega izreka o jordanskih homomorfizmih na superalgebre. Še prej pa vpeljimo pojme: superhomomorfizem, superantihomomorfizem in jordanski superhomomorfizem.

Definicija 3.4. Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} asociativni superalgebri. Potem je Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ superhomomorfizem, če je $\varphi(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$, $\varphi(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$ in

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1.$$

Definicija 3.5. Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} asociativni superalgebri. Potem je Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ superantihomomorfizem, če je $\varphi(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$, $\varphi(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$ in

$$\varphi(xy) = (-1)^{|x||y|}\varphi(y)\varphi(x), \quad x, y \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1.$$

Superhomomorfizem je homomorfizem superalgeber. V primeru, ko je lihi del superalgebre enak nič, pojem superantihomomorfizma sovпада s pojmom antihomomorfizma.

Definicija 3.6. Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} asociativni superalgebri. Potem je Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ jordanski superhomomorfizem, če je $\varphi(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$, $\varphi(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$ in

$$\varphi(x \circ_s y) = \varphi(x) \circ_s \varphi(y), \quad x, y \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1.$$

V primeru trivialnih superalgeber koncept jordanskega superhomomorfizma sovpada s konceptom jordanskega homomorfizma. Superhomomorfizmi in superantihomomorfizmi so primeri jordanskih superhomomorfizmov. V nadaljevanju bomo podali nekaj primerov netrivialnih superantihomomorfizmov in netrivialnih jordanskih superhomomorfizmov, torej takih, ki niso niti superhomomorfizmi niti superantihomomorfizmi superalgeber (glej [1]).

Primer 3.7. V splošnem superantihomorfizem med dvema asociativnima superalgebrama \mathcal{B} in \mathcal{A} ni antihomomorfizem med algebrama \mathcal{B} in \mathcal{A} . Velja pa naslednje: Naj Φ vsebuje tak element i , da je $i^2 = -1$ in definirajmo preslikavo $\iota : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $\iota(x_0 + x_1) = x_0 + ix_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0, x_1 \in \mathcal{A}_1$. Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, ki ohranja \mathbb{Z}_2 -gradacijo, je superantihomomorfizem superalgeber natanko tedaj, ko je $\iota \circ \varphi$ antihomomorfizem algeber.

Primer 3.8. Naj bo $\psi : M_r(\Phi) \rightarrow M_r(\Phi)$ antihomomorfizem. Potem je preslikava $\varphi : M(r) \rightarrow M(r)$, definirana s predpisom

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \psi(D) & -\psi(B) \\ \psi(C) & \psi(A) \end{bmatrix},$$

superantihomomorfizem.

Primer 3.9. Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra s superinvolucijo $*$. Preslikava $*$ je primer superantiavtomorfizma na \mathcal{A} .

Primer 3.10. Naj bo \mathcal{A} superalgebra, ki je komutativna kot algebra (na primer $\mathcal{A} = Q(1)$). Nadalje, naj bo $a_0 \in \mathcal{A}_0$ in definirajmo preslikavo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $\varphi(x_0 + x_1) = x_0 + a_0x_1$. Potem je φ jordanski superhomomorfizem, ki ni nujno superhomomorfizem niti superantihomomorfizem.

Primer 3.11. Naj bo $\gamma \in \Phi$ tak obrnljiv element, da je $\gamma \neq \pm 1$ in definirajmo $\varphi : Q(\alpha, \beta) \rightarrow Q(\alpha, \beta)$ s predpisom $\varphi(\lambda_0 + \lambda_1uv + \lambda_2u + \lambda_3v) = \lambda_0 + \lambda_1\gamma uv + \lambda_2\gamma u + \lambda_3\gamma^{-1}v$. Potem je φ jordanski superhomomorfizem, ki ni niti superhomomorfizem niti superantihomomorfizem.

Zadnja dva primera kažeta na to, da lahko netrivialni jordanski superhomomorfizmi obstajajo tudi na asociativnih superalgebrah. V obeh opisanih primerih nastopata asociativni superalgebri, katerih

sodi del je komutativen. Izkaže se, da so to pravzaprav edine asociativne pra-superalgebre, kjer obstajajo netrivialni primeri jordan-skih superhomomorfizmov. Beidar, Brešar in Chebotar so pokazali naslednji izrek.

Izrek 3.12. [1] *Surjektivni jordan-ski superhomomorfizem, ki slika iz poljubne asociativne superalgebre v asociativno pra-superalgebro, katere sodi del je nekomutativen, je bodisi superhomomorfizem bodisi superantihomomorfizem.*

Naravno se postavi vprašanje glede posplošitve zapisanega rezultata na gradirane algebre, kar bo predstavljeno v poglavju, ki sledi.

3.2 Jordanski ϵ -homomorfizmi

Že sam naslov nakazuje, da se bomo v nadaljevanju ukvarjali z jordan-skimi preslikavami gradiranih algeber, konkretno, z jordan-skimi ϵ -homomorfizmi. Proučili bomo, kakšna je zveza med jordan-skimi ϵ -homomorfizmi in ϵ -homomorfizmi ter ϵ -antihomomorfizmi. Dejansko gre za posplošitev izrekov o jordan-skih homomorfizmih algeber in jordan-skih superhomomorfizmih superalgeber. V dokazu glavnega izreka so uporabljene podobne metode kot v članku [1]. Velja pa omeniti, da so na določenih mestih opazne razlike, saj se v primeru gradiranih algeber pojavijo nekateri posebni primeri, ki jih v teoriji superalgeber ni potrebno posebej obravnavati.

Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} vseskozi asociativni algebri gradirani z grupo G , ϵ pa naj bo fiksni bikarakter za G . Preslikava $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ je *homogena*, če je $\varphi(\mathcal{B}_g) \subseteq \mathcal{A}_g$ za vsak $g \in G$. V nadaljevanju bomo zapisali definicijo ϵ -homomorfizma, ϵ -antihomomorfizma ter definicijo jordan-skega ϵ -homomorfizma.

Definicija 3.13. *Homogen Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ je ϵ -homomorfizem, če je*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}).$$

Vsak ϵ -homomorfizem je homomorfizem gradiranih algeber.

Definicija 3.14. *Homogen Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ je ϵ -antihomomorfizem, če je*

$$\varphi(xy) = \epsilon(x, y)\varphi(y)\varphi(x), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}).$$

Definicija 3.15. *Homogen Φ -modulski homomorfizem $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ je jordanški ϵ -homomorfizem, če je*

$$\varphi(x \circ_{\epsilon} y) = \varphi(x) \circ_{\epsilon} \varphi(y), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}).$$

Seveda so ϵ -homomorfizmi kot tudi ϵ -antihomomorfizmi primeri jordanških ϵ -homomorfizmov. Ob tem se zastavi vprašanje, ali so ti primeri edini možni primeri.

Naj bo \mathcal{A} gradirana algebra. Zapišimo nekaj identitet, ki jih bomo v nadaljevanju potrebovali:

$$\begin{aligned} [xy, z]_{\epsilon} &= x[y, z]_{\epsilon} + \epsilon(y, z)[x, z]_{\epsilon}y, \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}), & (3.1) \\ [[x, y]_{\epsilon}, z]_{\epsilon} &= x \circ_{\epsilon} (y \circ_{\epsilon} z) - \epsilon(x, y)y \circ_{\epsilon} (x \circ_{\epsilon} z), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}), & (3.2) \\ 2yxy &= (y \circ_{\epsilon} x) \circ_{\epsilon} y - \epsilon(y, x)x \circ_{\epsilon} y^2, \quad x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}), y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \end{aligned}$$

Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} gradirani algebra in $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ surjektivni jordanški ϵ -homomorfizem. Nadalje, naj bosta

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y), \\ \omega(x, y) &= \varphi(xy) - \epsilon(x, y)\varphi(y)\varphi(x) \end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$. V primeru, ko je eden izmed elementov x in y vsebovan v \mathcal{B}_1 , je $\omega(x, y) = \varphi(xy) - \varphi(y)\varphi(x)$. Seveda je φ ϵ -homomorfizem natanko tedaj, ko je $\tau(x, y) = 0$ za vsaka $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$. Prav tako velja, da je φ ϵ -antihomomorfizem natanko tedaj, ko je $\omega(x, y) = 0$ za vsaka $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$.

Z direktnim računom lahko preverimo, da za vse elemente $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ veljajo naslednje štiri enakosti

$$\tau(x, y) = -\epsilon(x, y)\tau(y, x), \quad (3.4)$$

$$\omega(x, y) = -\epsilon(x, y)\omega(y, x), \quad (3.5)$$

$$\tau(xy, z) - \tau(x, yz) = \varphi(x)\tau(y, z) - \tau(x, y)\varphi(z), \quad (3.6)$$

$$\omega(xy, z) - \omega(x, yz) = \epsilon(x, yz)\omega(y, z)\varphi(x) - \epsilon(xy, z)\varphi(z)\omega(x, y). \quad (3.7)$$

S pomočjo enakosti (3.4) ni težko videti, da za poljubna elementa $g, h \in G$ velja $\tau(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_h) = 0$ natanko tedaj, ko je $\tau(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}_g) = 0$. Prav tako je $\omega(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_h) = 0$ natanko tedaj, ko je $\omega(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}_g) = 0$ (enakost (3.5)). Če upoštevamo identiteto (3.2), je $\varphi([[x, y]_{\epsilon}, z]_{\epsilon}) =$

$\varphi(x \circ_\epsilon (y \circ_\epsilon z)) - \epsilon(x, y)\varphi(y \circ_\epsilon (x \circ_\epsilon z))$. Glede na definicijo jordanskega ϵ -homomorfizma takoj sledi

$$\varphi([[x, y]_\epsilon, z]_\epsilon) = [[\varphi(x), \varphi(y)]_\epsilon, \varphi(z)]_\epsilon. \quad (3.8)$$

Lema 3.16. *Naj bodo $p, q, r, s \in G$. Potem velja:*

- (i) Če je $\tau(\mathcal{B}_{pq}, \mathcal{B}_{rs}) = 0$, je $[\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \mathcal{A}_{rs}]_\epsilon = [\mathcal{A}_{pq}, \tau(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon = 0$.
- (ii) Če je $\omega(\mathcal{B}_{pq}, \mathcal{B}_{rs}) = 0$, je $[\omega(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \mathcal{A}_{rs}]_\epsilon = [\mathcal{A}_{pq}, \omega(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon = 0$.

Posebej velja: če je $\tau(\mathcal{B}_{pq}, \mathcal{B}_{rs}) = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_{pq}, \mathcal{B}_{rs}) = 0$, je

$$[\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \omega(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon = 0.$$

Dokaz. (i) Predpostavimo, da je $\tau(\mathcal{B}_{pq}, \mathcal{B}_{rs}) = 0$. Potem je tudi $\tau(\mathcal{B}_{rs}, \mathcal{B}_{pq}) = 0$. Naj bodo $x \in \mathcal{B}_p$, $y \in \mathcal{B}_q$ in $z \in \mathcal{B}_{rs}$. Ker je $[x, y]_\epsilon \in \mathcal{B}_{pq}$, je

$$\begin{aligned} \varphi([[x, y]_\epsilon, z]_\epsilon) &= \varphi([x, y]_\epsilon z) - \epsilon(xy, z)\varphi(z[x, y]_\epsilon) \\ &= \varphi([x, y]_\epsilon)\varphi(z) - \epsilon(xy, z)\varphi(z)\varphi([x, y]_\epsilon) \\ &= [\varphi([x, y]_\epsilon), \varphi(z)]_\epsilon. \end{aligned}$$

Primerjajmo pravkar zapisano relacijo z enakostjo (3.8). Potem je

$$[\varphi([x, y]_\epsilon) - [\varphi(x), \varphi(y)]_\epsilon, \varphi(z)]_\epsilon = 0.$$

Ker je $\varphi(x \circ_\epsilon y) = \varphi(x) \circ_\epsilon \varphi(y)$, je $[\tau(x, y), \varphi(z)]_\epsilon = 0$ za vse $x \in \mathcal{B}_p$, $y \in \mathcal{B}_q$, $z \in \mathcal{B}_{rs}$. S tem smo pokazali, da je $[\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \mathcal{A}_{rs}]_\epsilon = 0$. Posebej velja

$$[\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \omega(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon \subseteq [\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \mathcal{A}_{rs}]_\epsilon = 0.$$

Analogno lahko pokažemo enakost $[\mathcal{A}_{pq}, \tau(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon = 0$.

- (ii) Naj bo sedaj $\omega(\mathcal{B}_{pq}, \mathcal{B}_{rs}) = 0$. Ker je prav tako $\omega(\mathcal{B}_{rs}, \mathcal{B}_{pq}) = 0$, je

$$\begin{aligned} \varphi([[x, y]_\epsilon, z]_\epsilon) &= \epsilon(xy, z)\varphi(z)\varphi([x, y]_\epsilon) - \varphi([x, y]_\epsilon)\varphi(z) \\ &= -[\varphi([x, y]_\epsilon), \varphi(z)]_\epsilon \end{aligned}$$

za vse $x \in \mathcal{B}_p$, $y \in \mathcal{B}_q$ in $z \in \mathcal{B}_{rs}$. Glede na enakost (3.8) in predpostavko, da je φ jordanški ϵ -homomorfizem, sledi, da je $[\omega(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \mathcal{A}_{rs}]_\epsilon = 0$. Na podoben način lahko pokažemo, da je $[\mathcal{A}_{pq}, \omega(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon = 0$. Potem je

$$[\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q), \omega(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon \subseteq [\mathcal{A}_{pq}, \omega(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s)]_\epsilon = 0.$$

□

Od sedaj naprej naj bo \mathcal{A} taka gradirana praalgebra, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$. Pokazali bomo nekaj lem, ki jih bomo kasneje pri dokazu glavnega izreka potrebovali.

Lema 3.17. *Če je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_+) = 0$, je φ ϵ -homomorfizem.*

Dokaz. Ker je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_+) = 0$, je tudi $\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_1) = 0$. Posebej velja, da je $\tau(\mathcal{B}_{pr}, \mathcal{B}_1) = 0$ za vse $p, r \in G_-$. Glede na lemo 3.16 (i) sledi $[\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_r), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$ za vse $p, r \in G_-$. Torej je

$$[\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0. \quad (3.9)$$

Naj bodo $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$ in $z \in \mathcal{B}_1$. Glede na enakost (3.1) je

$$[\tau(x, y)\varphi(z), \varphi(z)]_\epsilon = 0.$$

S pomočjo relacije (3.6) sledi, da element $\varphi(x)\tau(y, z)$ ϵ -komutira z elementom $\varphi(z)$. To pomeni, da je

$$[\mathcal{A}_-\tau(\mathcal{B}_-, z), \varphi(z)]_\epsilon = 0 \quad (3.10)$$

za vsak $z \in \mathcal{B}_1$. Naj bosta $u \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $v \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Očitno je $uv \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. S pomočjo enakosti (3.1) in (3.10) izpeljemo

$$\begin{aligned} 0 &= [uv\tau(y, x), \varphi(x)]_\epsilon - u[v\tau(y, x), \varphi(x)]_\epsilon \\ &= \epsilon(vyx, x)[u, \varphi(x)]_\epsilon v\tau(y, x) \end{aligned}$$

za vse $y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$ in $x \in \mathcal{B}_1$. Potem velja, da je

$$[\mathcal{A}_+, \varphi(x)]_\epsilon \mathcal{A}_-\tau(\mathcal{B}_-, x) = 0 \quad (3.11)$$

za vsak $x \in \mathcal{B}_1$. Na podoben način s pomočjo identitet (3.6) in (3.9) pokažemo, da element $\tau(x, y)\varphi(z)$ ϵ -komutira z elementom

$\varphi(x)$ za vse $x \in \mathcal{B}_1$, $y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$. Pri tem upoštevamo, da je $[\varphi(x)\tau(y, z), \varphi(x)]_\epsilon = 0$ (glej enakost (3.1)). S pomočjo enakosti (3.4) ni težko videti, da potem tudi $\tau(y, x)\varphi(z)$ ϵ -komutira z elementom $\varphi(x)$. To pomeni, da je

$$[\tau(\mathcal{B}_-, x)\mathcal{A}_-, \varphi(x)]_\epsilon = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{B}_1$. Ponovno upoštevajmo enakost (3.1) in lastnost, da je $vu \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Torej velja

$$0 = [\tau(y, x)vu, \varphi(x)]_\epsilon - \epsilon(u, x)[\tau(y, x)v, \varphi(x)]_\epsilon u = \tau(y, x)v[u, \varphi(x)]_\epsilon$$

za vse $y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$ in $x \in \mathcal{B}_1$. Iz tega sledi, da je

$$\tau(\mathcal{B}_-, x)\mathcal{A}_-[\mathcal{A}_+, \varphi(x)]_\epsilon = 0 \quad (3.12)$$

za vsak $x \in \mathcal{B}_1$. Primerjajmo pravkar dobljeni enakosti (3.11) in (3.12) ter pri tem uporabimo trditev leme 1.31 (točka (iii)). Iz tega sledi, da je za vsak $x \in \mathcal{B}_1$ bodisi $\tau(\mathcal{B}_-, x) = 0$ ali $[\mathcal{A}_+, \varphi(x)]_\epsilon = 0$. Ker grupa \mathcal{B}_1 ne more biti unija svojih pravih podgrup in je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, je

$$\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_1) = 0. \quad (3.13)$$

Posebej velja $\tau(\mathcal{B}_{pr}, \mathcal{B}_1) = 0$ za vse $p \in G_-$ in $r \in G_+$. Ponovno upoštevamo lemo 3.16 (točka (i)), iz česar sledi $[\tau(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_r), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$. Torej je

$$[\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0. \quad (3.14)$$

Glede na enakosti (3.6), (3.13) in (3.14) vidimo, da je $[\tau(x, y)\varphi(z), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$, $y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$ ter $z \in \mathcal{B}_1$.

Nadalje, s pomočjo relacij (3.1) in (3.14) ni težko preveriti, da je $\tau(x, y)[\varphi(z), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$. Upoštevajmo še enakost (3.14) in lastnost $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \subseteq \mathcal{A}_1$. Potem sledi

$$\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+)[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+) = 0. \quad (3.15)$$

Naj bodo sedaj $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$ in $y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$. Pomnožimo enakost (3.6) z desne strani (nato pa še z leve strani) z $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$. Pri tem

upoštevajmo še enakosti (3.4) in (3.15). Potem je $\tau(x, y)\varphi(z)[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0$ in $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\varphi(x)\tau(y, z) = 0$. Iz tega sledi, da je

$$\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_-)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\mathcal{A}_+\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_-) = 0.$$

Glede na lemo 1.31 (točka (iv)) opazimo, da je $\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_-) = 0$ ali $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0$. Ker je po predpostavki $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, je

$$\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_-) = 0. \quad (3.16)$$

S ponovno uporabo enakosti (3.6) pridemo do identitete $\tau(x, y)\varphi(z) = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$ in $z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$. Potem je $\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+)\mathcal{A}_- = 0$. Glede na lemo 1.31 (točka (ii)) sledi bodisi $\mathcal{A}_- = 0$ bodisi $\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0$. Predpostavimo najprej, da velja slednje. Torej

$$\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0. \quad (3.17)$$

Potem s pomočjo leme 3.16 (točka (i)) opazimo, da je

$$[\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.18)$$

Naj bodo $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$ in $z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. S pomočjo enakosti (3.6), (3.16), (3.17) ter (3.18) vidimo, da je $[\tau(x, y)\varphi(z), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. Z uporabo identitet (3.1) in (3.18) ni težko preveriti, da je $\tau(x, y)[\varphi(z), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. Torej je

$$\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.19)$$

Glede na enakost (3.18) opazimo, da je prav tako

$$\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.20)$$

V nadaljevanju naj bodo $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$. Pomnožimo enakost (3.6) na desni strani z $[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon$. Pri tem upoštevajmo relaciji (3.16) in (3.19). Torej je

$$\tau(x, y)\varphi(z)[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0.$$

S tem smo pokazali da je

$$\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)\mathcal{A}_-[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0,$$

kar nas skupaj z enakostjo (3.20) vodi do identitete

$$\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)\mathcal{A}[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0.$$

Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra z lastnostjo $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, je

$$\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-) = 0.$$

Iz pokazanega sledi, da je φ ϵ -homomorfizem.

Predpostavimo sedaj, da je $\mathcal{A}_- = 0$. Potem je $\tau(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-) = 0$. S pomočjo enakosti $\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_1) = 0$ in leme 3.16 (točka (i)) ni težko sklepati, da je

$$[\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0. \quad (3.21)$$

Glede na enakost (3.6) opazimo, da je $[\tau(x, y)\varphi(z), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$ in $z \in \mathcal{B}_1$. Potem s pomočjo identitet (3.1) in (3.21) pridemo do enakosti

$$\tau(x, y)[\varphi(z), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0.$$

To pomeni, da je

$$\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+)[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0. \quad (3.22)$$

Naj bodo $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. Če pomnožimo enakost (3.6) na desni strani z $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$ ter upoštevamo identiteto (3.22), vidimo, da je $\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0$. Ker je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$ gradirana praalgebra in je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, je $\tau(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0$. S tem je dokaz zaključen. \square

Lema 3.18. *Če je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_+) = 0$, je φ ϵ -antihomomorfizem.*

Dokaz. Ker dokaz poteka na podoben način kot dokaz leme 3.17, bomo brez podrobnosti podali le glavne ideje. Najprej s pomočjo leme 3.16 (ii) opazimo, da je

$$[\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0.$$

Potem glede na enakost (3.7) izpeljemo identiteto

$$[\omega(y, z)\varphi(x), \varphi(z)]_\epsilon = 0$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$, $z \in \mathcal{A}_1$. Pri tem upoštevamo, da element $\varphi(z)\omega(x, y)$ ϵ -komutira z elementom $\varphi(z)$. S pomočjo enakosti (3.7) izpeljemo enakost $[\varphi(z)\omega(x, y), \varphi(x)]_\epsilon = 0$ za vse $x \in \mathcal{B}_1$, $y, z \in$

$\mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$, pri čemer upoštevamo, da je $[\omega(y, z)\varphi(x), \varphi(x)]_\epsilon = 0$. S tem smo pokazali, da je

$$[\omega(\mathcal{B}_-, x)\mathcal{A}_-, \varphi(x)]_\epsilon = [\mathcal{A}_-\omega(\mathcal{B}_-, x), \varphi(x)]_\epsilon = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{B}_1$. Potem s pomočjo enakosti (3.1) izpeljemo, da je

$$\omega(\mathcal{B}_-, x)\mathcal{A}_-[\mathcal{A}_+, \varphi(x)]_\epsilon = [\mathcal{A}_+, \varphi(x)]_\epsilon\mathcal{A}_-\omega(\mathcal{B}_-, x) = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{B}_1$. Po lemi 1.31 (točka (iii)) sledi

$$\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_1) = 0.$$

S pomočjo uporabe leme 3.16 (točka (ii)) vidimo, da je

$$[\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0.$$

Nadalje, glede na enakost (3.7) izpeljemo $[\varphi(z)\omega(x, y), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$, $y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$, $z \in \mathcal{B}_1$. Upoštevajmo še relacijo (3.1), iz česar sledi

$$\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+)[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+) = 0.$$

Naj bodo $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$ in $y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$. Pomnožimo enakost (3.7) z desne strani (nato pa še z leve strani) z aditivno grupo $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$. Potem je $\omega(y, z)\varphi(x)[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\varphi(z)\omega(x, y) = 0$. Torej je

$$\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\mathcal{A}_+\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+) = 0.$$

Upoštevajmo lemo 1.31 (točka (iv)) in predpostavko, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$. Iz tega sledi, da je

$$\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+) = 0.$$

Ponovno s pomočjo enakosti (3.7) izpeljemo enakost $\omega(y, z)\varphi(x) = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$ in $y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. To pomeni, da je $\omega(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+)\mathcal{A}_- = 0$. Potem po lemi 1.31 (točka (ii)) sledi $\mathcal{A}_- = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0$. Predpostavimo najprej, da je

$$\omega(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0.$$

Z uporabo leme 3.16 (točka (ii)) vidimo, da je

$$[\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.23)$$

Potem glede na enakost (3.7) izpeljemo $[\varphi(z)\omega(x, y), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$, $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$, $z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. Iz tega sledi, da je

$$\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0.$$

Glede na relacijo (3.23) prav tako velja

$$\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0.$$

Ponovno upoštevajmo enakost (3.7), iz česar sledi $\omega(y, z)\varphi(x)[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$ za vse $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_-)$. Torej je

$$\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)\mathcal{A}_-[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0.$$

Torej je $\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-)\mathcal{A}[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra in je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, je $\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-) = 0$.

Na koncu predpostavimo, da je $\mathcal{A}_- = 0$. Potem je $\omega(\mathcal{B}_-, \mathcal{B}_-) = 0$. Ker je po predpostavki $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_+) = 0$ in velja lema 3.16 (točka (ii)), je

$$[\omega(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0.$$

Glede na enakost (3.7) opazimo, da je $[\varphi(z)\omega(x, y), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$, $z \in \mathcal{B}_1$. Iz tega sledi

$$[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\omega(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0.$$

Pomnožimo enakost (3.7) na levi strani z aditivno grupo $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$. Hitro lahko preverimo, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\varphi(z)\omega(x, y) = 0$ za vse $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. S tem smo pokazali, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\mathcal{A}_+\omega(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0$. Ker je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$ gradirana praalgebra, je $\omega(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_+) = 0$. S tem smo pokazali, da je φ je ϵ -antihomomorfizem. \square

Naslednji izrek je posplošitev izreka 3.12.

Izrek 3.19. *Naj bo \mathcal{A} asociativna gradirana praalgebra z lastnostjo $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, \mathcal{B} poljubna asociativna gradirana algebra in $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ surjektiven jordanški ϵ -homomorfizem. Potem je φ bodisi ϵ -homomorfizem bodisi ϵ -antihomomorfizem.*

Dokaz. S pomočjo enakosti (3.3) in predpostavke, da je φ jordanški ϵ -homomorfizem, ni težko preveriti, da je

$$\varphi(axa) = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a) \tag{3.24}$$

za vse $a \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$ in $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$. Enakosti (3.24) lineariziramo in dobimo

$$\varphi(axb + bxa) = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(x)\varphi(a) \quad (3.25)$$

za vse $a, b \in \mathcal{B}_g$, $g \in G_+$ in $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$. Naj bodo $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ in $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. S pomočjo enakosti (3.24) vidimo, da je

$$\begin{aligned} \varphi(abxba + baxab) &= \varphi(a(bxb)a + b(axa)b) \\ &= \varphi(a)\varphi(bxb)\varphi(a) + \varphi(b)\varphi(axa)\varphi(b) \\ &= \varphi(a)\varphi(b)\varphi(x)\varphi(b)\varphi(a) \\ &\quad + \varphi(b)\varphi(a)\varphi(x)\varphi(a)\varphi(b). \end{aligned}$$

Po drugi strani pa je glede na enakost (3.25)

$$\begin{aligned} \varphi(abxba + baxab) &= \varphi((ab)x(ba) + (ba)x(ab)) \\ &= \varphi(ab)\varphi(x)\varphi(ba) + \varphi(ba)\varphi(x)\varphi(ab). \end{aligned}$$

Primerjajmo pravkar izpeljani identiteti in upoštevajmo, da je po predpostavki φ jordanski ϵ -homomorfizem ($\varphi(a \circ_\epsilon b) = \varphi(a) \circ_\epsilon \varphi(b)$). Potem je

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(ab)\varphi(x)(-\epsilon(b, a)\varphi(ab) + \varphi(b)\varphi(a) + \epsilon(b, a)\varphi(a)\varphi(b)) \\ &\quad + (-\epsilon(b, a)\varphi(ab) + \varphi(b)\varphi(a) + \epsilon(b, a)\varphi(a)\varphi(b))\varphi(x)\varphi(ab) \\ &\quad - \varphi(a)\varphi(b)\varphi(x)\varphi(b)\varphi(a) - \varphi(b)\varphi(a)\varphi(x)\varphi(a)\varphi(b) \\ &= \tau(a, b)\varphi(x)\varphi(b)\varphi(a) + \epsilon(b, a)\omega(a, b)\varphi(x)\varphi(a)\varphi(b) \\ &\quad - \epsilon(b, a)\tau(a, b)\varphi(x)\varphi(ab) - \epsilon(b, a)\omega(a, b)\varphi(x)\varphi(ab) \\ &= -\epsilon(b, a)(\tau(a, b)\varphi(x)\omega(a, b) + \omega(a, b)\varphi(x)\tau(a, b)). \end{aligned}$$

za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ in $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. Torej je

$$\tau(a, b)\varphi(x)\omega(a, b) + \omega(a, b)\varphi(x)\tau(a, b) = 0 \quad (3.26)$$

za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ in $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. Naj bosta $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$. Zaradi boljše preglednosti vpeljimo oznaki $\tau = \tau(a, b)$ in $\omega = \omega(a, b)$. Upoštevajmo, da je φ surjektivna preslikava, kar pomeni, da lahko enakost (3.26) zapišemo kot $\tau y \omega + \omega y \tau = 0$ za vsak $y \in \mathcal{A}$. Potem je $\tau y (\omega z \tau) = -\tau (y \tau z) \omega = (\omega y \tau) z \tau = -\tau y \omega z \tau$ za vse $y, z \in \mathcal{A}$. S tem smo pokazali, da je $\tau \mathcal{A} \omega \mathcal{A} \tau = 0$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra,

sledi, da je $\tau = 0$ ali $\omega = 0$. Naj bosta $g, h \in G_+$. Pokažimo, da je ena izmed teh dveh enakosti izpolnjena za vse elemente $a \in \mathcal{B}_h$ in vse elemente $b \in \mathcal{B}_g$. Za poljuben fiksen $a \in \mathcal{B}_h$ sta množici $\{b \in \mathcal{B}_g \mid \tau(a, b) = 0\}$ in $\{b \in \mathcal{B}_g \mid \omega(a, b) = 0\}$ aditivni podgrupi grupe \mathcal{B}_g . Še več, njuna unija je enaka \mathcal{B}_g . Ker pa grupa ne more biti unija svojih pravih podgrup, je $\tau(a, \mathcal{B}_g) = 0$ ali $\omega(a, \mathcal{B}_g) = 0$. Potem je \mathcal{B}_h unija svojih aditivnih podgrup $\{a \in \mathcal{B}_h \mid \tau(a, \mathcal{B}_g) = 0\}$ in $\{a \in \mathcal{B}_h \mid \omega(a, \mathcal{B}_g) = 0\}$. Po istem razmisleku sledi, da je ena izmed teh dveh podgrup enaka grupi \mathcal{B}_h . S tem smo pokazali, da za vsak par $g, h \in G_+$ velja $\tau(\mathcal{B}_h, \mathcal{B}_g) = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_h, \mathcal{B}_g) = 0$.

V nadaljevanju pokažimo, da je bodisi $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) = 0$ za vsak $g \in G_+$ bodisi je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) = 0$ za vsak $g \in G_+$. Predpostavimo, da je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \neq 0$ in $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) \neq 0$ za neka $g, h \in G_+$. Glede na pokazano je

$$\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) = 0 \text{ in } \omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) = 0. \quad (3.27)$$

Prav tako vemo, da je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = 0$. V primeru, ko je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = 0$, sledi $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko. Torej smemo predpostaviti, da je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \neq 0$. Namreč, če je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = 0$, je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \neq 0$ in dokaz poteka na enak način, Seveda je (glede na pokazano) $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{gpr}) = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{gpr}) = 0$ in podobno $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{pr}) = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{pr}) = 0$ za vse $p, r \in G_-$. Ker je $\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}_{ij}$ za vse $i, j \in G$, sledi po lemi 3.16, da je

$$[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \omega(\mathcal{B}_g \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_r)]_\epsilon = 0, \quad (3.28)$$

$$[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_p \mathcal{B}_r)]_\epsilon = 0, \quad (3.29)$$

$$[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \omega(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_r)]_\epsilon = 0. \quad (3.30)$$

Ker smo predpostavili, da je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) = 0$, je $[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_g]_\epsilon = 0$. S pomočjo enakosti (3.1) in (3.30) vidimo, da je

$$\begin{aligned} [\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \omega(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_r) \mathcal{A}_g]_\epsilon &\subseteq [\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \omega(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_r)]_\epsilon \mathcal{A}_g \\ &+ \omega(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_r) [\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_g]_\epsilon = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Naj bodo $x \in \mathcal{B}_g$, $y \in \mathcal{B}_p$ in $z \in \mathcal{B}_r$. Glede na relacije (3.7), (3.28), (3.29) in (3.31) sledi $[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \varphi(z)\omega(x, y)]_\epsilon = 0$. Torej je

$[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_r \omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_p)]_\epsilon = 0$ za vse $p, r \in G_-$. S pomočjo enakosti (3.1) izpeljemo

$$\begin{aligned} [\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_s]_\epsilon \mathcal{A}_r \omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_p) &\subseteq [\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_s \mathcal{A}_r \omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_p)]_\epsilon \\ &+ \mathcal{A}_s [\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_r \omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_p)]_\epsilon = 0 \end{aligned}$$

za vse $s \in G_+$ ter $p, r \in G_-$. S tem smo pokazali, da je

$$[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_+]_\epsilon \mathcal{A}_- \omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_-) = 0. \quad (3.32)$$

Na podoben način, z obravnavo lastnosti $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{rpg}) = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{rpg}) = 0$, pokažemo, da je $[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_p) \mathcal{A}_r]_\epsilon = 0$. Potem izpeljemo identiteto

$$\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_-) \mathcal{A}_- [\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.33)$$

Če primerjamo enakosti (3.32) in (3.33) ter upoštevamo lemo 1.31 (točka (iii)), je bodisi $\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_-) = 0$ bodisi je $[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. Predpostavimo najprej, da je

$$[\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.34)$$

Ni težko videti, da je $\omega(a, b) - \tau(a, b) = [\varphi(a), \varphi(b)]_\epsilon$ za vse $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$. Ker je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = 0$, za poljubna elementa $a, b \in \mathcal{B}_1$ velja $\omega(a, b) = 0$. Potem pa je $\tau(a, b) = -[\varphi(a), \varphi(b)]_\epsilon$. Glede na enakost (3.34) sledi $[[\varphi(a), \varphi(b)], \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. Ker je po predpostavki φ surjektivna preslikava, je $[[x, y], \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{A}_1$. Posebej velja, da je $[[x^2, y], z]_\epsilon = 0$ za vsak $z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. S pomočjo enakosti (3.1) vidimo, da je

$$[x[x, y] + [x, y]x, z]_\epsilon = [2x[x, y], z]_\epsilon = 0.$$

Iz tega sledi, da je $[x, z]_\epsilon [x, y] = 0$. Ker element $[x, y]$ ϵ -komutira z algebro \mathcal{A}_+ , je $[x, z]_\epsilon \mathcal{A}_+ [x, y]_\epsilon = 0$ za vsak $z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Torej je tudi $[x, y] \mathcal{A}_+ [x, y] = 0$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}_1$. Glede na lemo 1.31 (točka (i)) sledi, da je $[x, y] = 0$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}_1$. To pa je v nasprotju s predpostavko.

Torej je $\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_-) = 0$. Z uporabo leme 3.16 (točka (ii)) vidimo, da je

$$[\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_-]_\epsilon = 0. \quad (3.35)$$

Naj bodo $x \in \mathcal{B}_g$, $y \in \mathcal{B}_1$, $z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $w \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Po enakosti (3.1) je

$$[\omega(x, y), z]_\epsilon w \in [\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_-]_\epsilon + \mathcal{A}_+ [\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_-]_\epsilon = 0.$$

S tem smo pokazali, da je $[\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_+]_\epsilon \mathcal{A}_- = 0$. Potem pa po lemi 1.31 (točka (ii)) sledi, da je bodisi $[\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_1), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$ bodisi je $\mathcal{A}_- = 0$. Predpostavimo najprej, da velja prva enakost. Upoštevajmo relacijo (3.35), iz česar sledi, da je

$$\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{Z}_\epsilon(\mathcal{A}).$$

Glede na pokazano je $\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_h) = 0$ ali $\tau(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_h) = 0$. Pokažimo, da je v obeh primerih

$$\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) = 0. \quad (3.36)$$

Predpostavimo najprej, da je $\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_h) = 0$. Potem je tudi $\omega(\mathcal{B}_h, \mathcal{B}_g) = 0$. S pomočjo enakosti (3.7) in (3.27) opazimo, da je $\omega(y, z) \varphi(x) = 0$ za vse $x \in \mathcal{B}_h$, $y \in \mathcal{B}_1$ in $z \in \mathcal{B}_g$. Torej je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \mathcal{A}_h = 0$. Iz tega sledi $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) \subseteq \omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \mathcal{A}_h = 0$. Naj bo sedaj $\tau(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_h) = 0$. Na podoben način z uporabo relacij (3.6) in (3.27) pokažemo, da je $\mathcal{A}_g \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) = 0$. Torej je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) \subseteq \mathcal{A}_g \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) = 0$. Upoštevajmo, da je $\omega(\mathcal{B}_g, \mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{Z}_\epsilon(\mathcal{A})$ in zato je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \mathcal{A} \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) = 0$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) = 0$ ali $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) = 0$. To pa je v nasprotju s predpostavko.

Predpostavimo sedaj, da je $\mathcal{A}_- = 0$. Torej je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$. Oglejmo si enakost (3.36). Ta enakost velja za vsak $h \in G_+$ z lastnostjo $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) \neq 0$. Še več, relacija velja tudi v primeru, ko je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_h) = 0$. Torej je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_+) = 0$. S pomočjo uporabe enakosti (3.6) sledi $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \varphi(x) \tau(y, z) = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_+)$ in $y, z \in \mathcal{B}_1$. Torej je $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) \mathcal{A}_+ \tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = 0$. Iz tega sledi $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_g) = 0$ ali $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = 0$, kar je v nasprotju s predpostavko. Pokazali smo torej, da je $\tau(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_+) = 0$ ali $\omega(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_+) = 0$. Glede na lemo 3.17 in lemo 3.18 sledi želeni rezultat. Dokaz je zaključen. \square

Na koncu predstavimo še primer jordskega ϵ -homomorfizma, ki ni niti ϵ -homomorfizem niti ϵ -antihomomorfizem.

Primer 3.20. Naj bo \mathcal{A} taka gradirana praalgebra z enoto, da je $[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}]_\epsilon = 0$ in $\mathcal{A}_- \circ_\epsilon \mathcal{A}_- = 0$ (algebre s temi lastnostmi so podrobneje opisane v članku [3, trditev 2.7]). Predpostavimo, da je $a \in \mathcal{A}_1$ tak obrnljiv element, da je $a^2 \neq \pm 1$. Nadalje, definirajmo preslikavo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $\varphi(x + y) = x + ay$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Potem je φ jordanski ϵ -avtomorfizem, ki ni niti ϵ -avtomorfizem niti ϵ -antiavtomorfizem. Namreč, $\varphi(xy) \neq \varphi(x)\varphi(y)$ in $\varphi(xy) \neq \epsilon(x, y)\varphi(y)\varphi(x)$, $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Ta primer je dejansko posplošitev primera 3.10.

3.3 Jordanska superodvajanja

V tem razdelku bomo namenili pozornost jordanskim superodvajanjem asociativnih superalgeber. Klasična Hersteinova teorija med drugim poda odgovor na vprašanje, kakšna je zveza med odvajanji in jordanskimi odvajanji algeber. Preden bomo predstavili rezultat, zapišimo definicijo odvajanja in jordanskega odvajanja.

Definicija 3.21. *Odvajanje je tak Φ -modulski homomorfizem D na asociativni algebri \mathcal{A} , da velja*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y), \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Naj bo \mathcal{A} asociativna algebra in naj bo $a \in \mathcal{A}$. Primer odvajanja na algebri \mathcal{A} je tako imenovano notranje odvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, definirano s predpisom $D(x) = [a, x]$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.

Definicija 3.22. *Jordansko odvajanje je tak Φ -modulski homomorfizem D na asociativni algebri \mathcal{A} , da velja*

$$D(x \circ y) = D(x) \circ y + x \circ D(y), \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Očitno je vsako odvajanje tudi jordansko odvajanje. Leta 1957 je Herstein pokazal, da je vsako jordansko odvajanje na asociativni praalgebri odvajanje ([31]). Izkaže pa se, da izrek velja celo za asociativne polpraalgebre.

Izrek 3.23. [4] *Vsako jordansko odvajanje na asociativni polpraalgebri je odvajanje.*

V luči klasičnega rezultata o jordanskih odvajanjih asociativnih algeber se poraja vprašanje, ali velja posplošitev tega rezultata na

asociativne superalgebre. Tako bomo v nadaljevanju obravnavali zvezo med jordanskimi superodvajanja in superodvajanja superalgeber. Preden predstavimo rezultat, zapišimo definicijo superodvajanja in definicijo jordanskega superodvajanja.

Definicija 3.24. *Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra. Potem je Φ -modulski homomorfizem $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$*

1. *superodvajanje stopnje 0, če je $D(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$, $D(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$ in*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y), \quad x, y \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

2. *superodvajanje stopnje 1, če je $D(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_1$, $D(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_0$ in*

$$D(xy) = D(x)y + (-1)^{|x|}xD(y), \quad x, y \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

Superodvajanje je vsota superodvajanja stopnje 0 in superodvajanja stopnje 1.

Definicija 3.25. *Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra. Potem je Φ -modulski homomorfizem $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$*

1. *jordansko superodvajanje stopnje 0, če je $D(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$, $D(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$ in*

$$D(x \circ_s y) = D(x) \circ_s y + x \circ_s D(y), \quad x, y \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

2. *jordansko superodvajanje stopnje 1, če je $D(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_1$, $D(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_0$ in*

$$D(x \circ_s y) = D(x) \circ_s y + (-1)^{|x|}x \circ_s D(y), \quad x, y \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

Jordansko superodvajanje je vsota jordanskega superodvajanja stopnje 0 in jordanskega superodvajanja stopnje 1.

V primeru, ko je superalgebra trivialna, definicija superodvajanja sovpada z definicijo odvajanja. Prav tako v primeru trivialnih superalgeber koncept jordanskega superodvajanja sovpada z jordanskim odvajanjem. Seveda je vsako superodvajanje tudi jordansko superodvajanje. Ob tem se naravno porodi vprašanje, pod katerimi pogoji velja obratna zveza.

Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra in naj bo $k = 0, 1$. Nadalje, naj bo D_k jordansko superodvajanje stopnje k na algebri \mathcal{A} . Definirajmo bilinearno preslikavo $\delta_k : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom

$$\delta_k(x, y) = D_k(xy) - D_k(x)y - (-1)^{k|x|}xD_k(y)$$

za vse homogene elemente $x, y \in \mathcal{A}$. Očitno je $\delta_k = 0$ natanko tedaj, ko je D_k superodvajanje stopnje k .

Naj bosta x in y taka elementa asociativne polpra-superalgebre \mathcal{A} , da je $x\mathcal{A}y = 0$. Potem sledi $xy = yx = y\mathcal{A}x = 0$. Namreč, vidimo, da je $ya(x\mathcal{A}y)ax = 0$ za vsak $a \in \mathcal{A}$. Potem je $y\mathcal{A}x = 0$, saj je \mathcal{A} polpraalgebra. Podobno opazimo, da iz enakosti $x(y\mathcal{A}x)y = 0$ ter $y(x\mathcal{A}y)x = 0$ sledi $xy = yx = 0$. Za take elemente x in y , za katere velja pravkar zapisano, bomo vpeljali oznako $x \perp y$.

Zapišimo nekaj elementarnih rezultatov, ki jih bomo v nadaljevanju potrebovali. Trditvi (i) in (ii) naslednje leme sta dejansko posplošitvi leme 1.22 (točka (ii) ter točka (iii)).

Lema 3.26. *Naj bo \mathcal{U} gradiran ideal asociativne polpra-superalgebre \mathcal{A} .*

- (i) Če je $u_1\mathcal{U}_1u_1 = 0$, kjer je $u_1 \in \mathcal{U}_1$, je $u_1 = 0$.
- (ii) Če sta $u_0 \in \mathcal{U}_0$ in $u_1 \in \mathcal{U}_1$ taka, da je $u_0\mathcal{U}_k u_1 = u_1\mathcal{U}_k u_0 = 0$, kjer je $k = 0$ ali $k = 1$, je $u_0\mathcal{U}u_1 = u_1\mathcal{U}u_0 = 0$.
- (iii) Če je $u_1\mathcal{U}_0 = 0$ ali $\mathcal{U}_0u_1 = 0$, kjer je $u_1 \in \mathcal{U}_1$, je $u_1 = 0$.

Dokaz. (i) Takoj vidimo, da je

$$u_1\mathcal{U}u_1\mathcal{U}u_1 \subseteq u_1\mathcal{U}u_1\mathcal{U}_1u_1 + u_1\mathcal{U}_1u_1\mathcal{U}u_1 + u_1\mathcal{U}_1u_1$$

za vse $u_1 \in \mathcal{U}_1$. Ker je $u_1\mathcal{U}_1u_1 = 0$, je $u_1\mathcal{U}u_1\mathcal{U}u_1 = 0$. Iz tega sledi $u_1 = 0$, saj je \mathcal{A} polpraalgebra.

(ii) Naj bo $u_0\mathcal{U}_0u_1 = u_1\mathcal{U}_0u_0 = 0$. Iz tega sledi

$$(u_0\mathcal{U}_1u_1)\mathcal{U}_0(u_0\mathcal{U}_1u_1) = 0.$$

Ker je \mathcal{U}_0 polpraalgebra, je potem $u_0\mathcal{U}_1u_1 = 0$. Upoštevajmo, da je po predpostavki tudi $u_0\mathcal{U}_0u_1 = 0$, iz česar sledi $u_0\mathcal{U}u_1 = 0$. V nadaljevanju naj bo $u_0\mathcal{U}_1u_1 = u_1\mathcal{U}_1u_0 = 0$. Potem je $(u_0\mathcal{U}_0u_1)\mathcal{U}_1(u_0\mathcal{U}_0u_1) = 0$. Glede na (i) sledi enakost $u_0\mathcal{U}_0u_1 = 0$. Ker je prav tako po predpostavki $u_0\mathcal{U}_1u_1 = 0$, sledi $u_0\mathcal{U}u_1 = 0$.

- (iii) Predpostavimo, da je $u_1\mathcal{U}_0 = 0$. Potem je $u_1\mathcal{U}_0x_1u_1 = 0$ in $x_1u_1\mathcal{U}_0u_1 = 0$ za vse $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Glede na (ii) ni težko razmisliti, da je $u_1\mathcal{U}x_1u_1 = 0$ za vse $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je tudi $x_1u_1\mathcal{U}x_1u_1 = 0$. Iz tega sledi $\mathcal{A}_1u_1 = 0$, saj je \mathcal{U} polpraalgebra. Z uporabo že dokazane implikacije (i) vidimo, da je $u_1 = 0$.

□

Lema 3.27. *Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra. Predpostavimo, da je $a \in \mathcal{A}_1$ tak, da je $ax_1, x_1a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_0)$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je $a^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Glede na predpostavko takoj vidimo, da je $0 = [a^2, ax_1] = a[a^2, x_1]$ in $0 = [a^2, x_1a] = [a^2, x_1]a$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Torej je $[a^2, [a^2, \mathcal{A}_1]] = 0$. Ker je $[a^2, [a^2, \mathcal{A}_0]] = 0$, je $[a^2, [a^2, \mathcal{A}]] = 0$. Iz tega sledi $a^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. □

Lema 3.28. *Naj bo \mathcal{U} gradiran ideal asociativne polpra-superalgebre \mathcal{A} . Predpostavimo, da za element $a_1 \in \mathcal{A}_1$ velja $[\mathcal{U}_0a_1, \mathcal{U}_0] = 0$. Potem je $\mathcal{U}_0a_1 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Hitro vidimo, da je

$$0 = [u_0a_1, x_0v_0] = [u_0a_1, x_0]v_0 + x_0[u_0a_1, v_0]$$

za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Potem je $[u_0a_1, x_0]\mathcal{U}_0 = 0$. Ker je $[u_0a_1, x_0] \in \mathcal{U}_1$, je $[\mathcal{U}_0a_1, \mathcal{A}_0] = 0$ (glej tudi lemo 3.26, točka (iii)). Potem je $[u_0a_1, [u_0a_1, \mathcal{A}_1]] \subseteq [u_0a_1, \mathcal{A}_0] = 0$. Iz tega sledi, da je $[u_0a_1, [u_0a_1, \mathcal{A}]] = 0$ za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$. Ker je \mathcal{A} polpraalgebra, sledi želeni rezultat. □

Lema 3.29. *Naj bosta x in y taka homogena elementa asociativne polpra-superalgebre \mathcal{A} , da je $x \perp y$. Potem je $x \circ_s D_k(y) = 0$, $k = 0, 1$.*

Dokaz. Ker je po predpostavki $x \perp y$, je $x \circ_s y = 0$. Iz tega sledi

$$0 = D_k(x \circ_s y) = D_k(x) \circ_s y + (-1)^{|x|k} x \circ_s D_k(y).$$

Pomnožimo pravkar zapisano identiteto z leve strani z elementom xa , $a \in \mathcal{A}$. Ker je $xa(D_k(x) \circ_s y) = 0$, je $xa(x \circ_s D_k(y)) = 0$ za vsak $a \in \mathcal{A}$. Ni težko videti, da je potem tudi $(x \circ_s D_k(y))\mathcal{A}(x \circ_s D_k(y)) = 0$. Ker je \mathcal{A} polpraalgebra, sledi $x \circ_s D_k(y) = 0$. S tem smo pokazali želeno. □

Lema 3.30. *Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra in D jordansko superodvajanje na \mathcal{A} . Potem je*

- (i) $\delta_k(x_0, y_0) = -\delta_k(y_0, x_0)$, $\delta_k(x_0, y_1) = -\delta_k(y_1, x_0)$ in $\delta_k(x_1, y_1) = \delta_k(y_1, x_1)$ za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$;
- (ii) $D_k([x_1^2, y]) = [[D_k(x_1), x_1]_s, y]_s + [x_1^2, D_k(y)]$ za vse $x_1 \in \mathcal{A}_1$, $y \in \mathcal{A}$.

Dokaz. (i) Ni težko preveriti, da je

$$\begin{aligned}
 0 &= D_k(x_0 \circ_s y_0) - D_k(x_0) \circ_s y_0 - x_0 \circ_s D_k(y_0) \\
 &= \delta_k(x_0, y_0) + \delta_k(y_0, x_0), \\
 0 &= D_k(x_0 \circ_s y_1) - D_k(x_0) \circ_s y_1 - x_0 \circ_s D_k(y_1) \\
 &= \delta_k(x_0, y_1) + \delta_k(y_1, x_0), \\
 0 &= D_k(x_1 \circ_s y_1) - D_k(x_1) \circ_s y_1 - (-1)^k x_1 \circ_s D_k(y_1) \\
 &= \delta_k(x_1, y_1) - \delta_k(y_1, x_1)
 \end{aligned}$$

za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$.

- (ii) Naj bosta $y = y_0 + y_1 \in \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Z direktnim računom preverimo, da je $[x_1^2, y] = 4x_1 \circ_s (x_1 \circ_s y)$. Potem je $D_k([x_1^2, y]) = 4D_k(x_1 \circ_s (x_1 \circ_s y))$. Upoštevajmo, da je D_k jordansko superodvajanje stopnje k , iz česar sledi želeno. □

Lema 3.31. *Naj bo \mathcal{U} gradiran ideal asociativne polpra-superalgebre \mathcal{A} . Predpostavimo, da je $\delta_k(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_0) = 0$. Potem je*

- (i) $[\delta_k(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1), \mathcal{U}_0] = 0$;
- (ii) $\delta_k(u_0, x_1)y_1 = u_0\delta_k(x_1, y_1) - \delta_k(u_0x_1, y_1)$ za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$;
- (iii) $\delta_k(x_0, u_1)y_1 = x_0\delta_k(u_1, y_1) - \delta_k(x_0u_1, y_1)$ za vse $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$;
- (iv) $(-1)^k y_1\delta_k(u_0, x_1) = \delta_k(x_1u_0, y_1) - \delta_k(x_1, y_1)u_0$ za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$;
- (v) $(-1)^k y_1\delta_k(x_0, u_1) = \delta_k(u_1x_0, y_1) - \delta_k(u_1, y_1)x_0$ za vse $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$;
- (vi) $\delta_0(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) \perp [\mathcal{A}_0, \mathcal{U}_0]$;
- (vii) $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1[\mathcal{A}_0, \mathcal{U}_0] = [\mathcal{A}_0, \mathcal{U}_0]\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0$.

Dokaz. (i) Glede na predpostavko ni težko videti, da je

$$D_k([x_1^2, u_0]) = [D_k(x_1^2), u_0] + [x_1^2, D_k(u_0)]$$

za vse $x_1 \in \mathcal{A}_1$, $u_0 \in \mathcal{U}_0$. Primerjajmo pravkar zapisano enakost z rezultatom leme 3.30 (točka (ii)), iz česar sledi

$$[\delta_k(x_1, x_1), u_0] = 0$$

za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. S postopkom linearizacije pravkar zapisane identitete pridemo do enakosti $[\delta_k(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1), \mathcal{U}_0] = 0$, pri čemer upoštevamo, da je $\delta_k(x_1, y_1) = \delta_k(y_1, x_1)$.

(ii) V nadaljevanju si oglejmo izraz $D_k(u_0 x_1 y_1)$, kjer so $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je

$$\begin{aligned} D_k(u_0(x_1 y_1)) &= D_k(u_0) x_1 y_1 + u_0 D_k(x_1 y_1) \\ &= D_k(u_0) x_1 y_1 + u_0 (\delta_k(x_1, y_1) + D_k(x_1) y_1 \\ &\quad + (-1)^k x_1 D_k(y_1)). \end{aligned}$$

Po drugi strani pa vidimo, da je

$$\begin{aligned} D_k((u_0 x_1) y_1) &= \delta_k(u_0 x_1, y_1) + D_k(u_0 x_1) y_1 + (-1)^k u_0 x_1 D_k(y_1) \\ &= \delta_k(u_0 x_1, y_1) + (\delta_k(u_0, x_1) + D_k(u_0) x_1 \\ &\quad + u_0 D_k(x_1)) y_1 + (-1)^k u_0 x_1 D_k(y_1). \end{aligned}$$

Primerjanje tako dobljenih enakosti nas privede do zelene identitete.

- (iii) S pomočjo obravnave izraza $D_k(y_1 x_1 u_0)$ in leme 3.30 pokažemo zeleno enakost.
- (iv) S pomočjo obravnave izraza $D_k(x_0 u_1 y_1)$ pokažemo zeleno enakost.
- (v) S pomočjo obravnave izraza $D_k(y_1 u_1 x_0)$ pokažemo zeleno enakost.
- (vi) Če upoštevamo identiteti (i) in (ii), ni težko videti, da je $[\delta_k(u_0, \mathcal{A}_1) \mathcal{A}_1, u_0] = 0$ za vsak $u_0 \in \mathcal{U}_0$. Za poljubna elementa $z_0 \in \mathcal{A}_0$ in $z_1 \in \mathcal{A}_1$ je $z_1 z_0 \in \mathcal{A}_1$. Potem je

$$\begin{aligned} \delta_k(u_0, x_1) z_1 [z_0, u_0] &= [\delta_k(u_0, x_1) z_1 z_0, u_0] - [\delta_k(u_0, x_1) z_1, u_0] z_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da je

$$\delta_k(u_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1[\mathcal{A}_0, u_0] = 0 \quad \text{za vsak } u_0 \in \mathcal{U}_0. \quad (3.37)$$

Če primerjamo relaciji (i) ter (iv), dobimo

$$[\mathcal{A}_1\delta_k(u_0, \mathcal{A}_1), u_0] = 0 \quad \text{za vsak } u_0 \in \mathcal{U}_0.$$

Ker je $z_0z_1 \in \mathcal{A}_1$, je

$$\begin{aligned} [z_0, u_0]z_1\delta_k(u_0, x_1) &= [z_0z_1\delta_k(u_0, x_1), u_0] \\ &\quad - z_0[z_1\delta_k(u_0, x_1), u_0]z_0 = 0. \end{aligned}$$

Iz tega sledi enakost

$$[\mathcal{A}_0, u_0]\mathcal{A}_1\delta_k(u_0, \mathcal{A}_1) = 0 \quad \text{za vsak } u_0 \in \mathcal{U}_0. \quad (3.38)$$

S pomočjo linearizacije identitete (3.37) izpeljemo enakost

$$\delta_k(u_0, x_1)y_1[z_0, v_0] + \delta_k(v_0, x_1)y_1[z_0, u_0] = 0$$

za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $z_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Po (3.38) je

$$\begin{aligned} (\delta_k(u_0, x_1)y_1[z_0, v_0])a_1(\delta_k(u_0, x_1)y_1[z_0, v_0]) & \quad (3.39) \\ = -\delta_k(u_0, x_1)y_1[z_0, v_0]a_1\delta_k(v_0, x_1)y_1[z_0, u_0] & = 0 \end{aligned}$$

za vsak $a_1 \in \mathcal{A}_1$. Linearizacija enakosti (3.38) nas privede do rezultata

$$[z_0, v_0]y_1\delta_k(u_0, x_1) + [z_0, u_0]y_1\delta_k(v_0, x_1) = 0.$$

Potem s pomočjo (3.37) opazimo, da je

$$\begin{aligned} ([z_0, v_0]y_1\delta_k(u_0, x_1))a_1([z_0, v_0]y_1\delta_k(u_0, x_1)) & \quad (3.40) \\ = -[z_0, u_0]y_1\delta_k(v_0, x_1)a_1[z_0, v_0]y_1\delta_k(u_0, x_1) & = 0. \end{aligned}$$

Predpostavimo, da je $k = 0$. Glede na enakosti (3.37) in (3.38) je $[\mathcal{A}_0, u_0] \perp \delta_0(u_0, \mathcal{A}_1)$, pri čemer upoštevamo lemo 3.26 (točka (ii)). Torej je

$$[\mathcal{A}_0, u_0]\mathcal{A}\delta_0(u_0, \mathcal{A}_1) = 0.$$

Uporabimo linearizacijo in dobimo

$$\begin{aligned} (\delta_0(u_0, x_1)y[z_0, v_0])a(\delta_0(u_0, x_1)y[z_0, v_0]) & \quad (3.41) \\ = -\delta_0(u_0, x_1)y[z_0, v_0]a\delta_0(v_0, x_1)y[z_0, u_0] & = 0 \end{aligned}$$

za vsak $a \in \mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je $[z_0, v_0] \perp \delta_0(u_0, x_1)$, saj je \mathcal{A} polpraalgebra.

- (vii) Predpostavimo, da je $k = 1$. Glede na relaciji (3.39) in (3.40) ter lemo 3.26 (točka (i)) sledi, da je $[z_0, v_0]\mathcal{A}_1\delta_1(u_0, x_1) = 0$ in $\delta_1(u_0, x_1)\mathcal{A}_1[z_0, v_0] = 0$ za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $z_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$. S tem smo pokazali želeno. □

V nadaljevanju bomo obravnavo glede povezave med jordanskimi superodvajanjem in superodvajanjem razdelili na dva dela. V prvem koraku se bomo posvetili jordanskim superodvajanjem stopnje 0, nato pa jordanskim superodvajanjem stopnje 1.

Jordanska superodvajanja stopnje 0

S simbolom \mathcal{U} bomo v nadaljevanju vseskozi označevali gradiran ideal asociativne polpra-superalgebre \mathcal{A} generiran z $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]$. Pokazali bomo, da je $D_0|\mathcal{U}$ superodvajanje stopnje 0.

Izrek 3.32. $\delta_0(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$.

Dokaz. Ker je D_0 jordansko superodvajanje stopnje 0 na polpra-superalgebri \mathcal{A} , je tudi jordansko odvajanje na polpraalgebri \mathcal{A}_0 . Potem po izreku 3.23 sledi, da je D_0 odvajanje na \mathcal{A}_0 . Torej je

$$\delta_0(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) = 0. \quad (3.42)$$

Glede na lemo 3.31 (točka (vi)) sledi, da je

$$\delta_0(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) \perp [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]. \quad (3.43)$$

Posebej velja, da je

$$\begin{aligned} & [y_1\delta_0(x_0, x_1), y_0]z[y_1\delta_0(x_0, x_1), y_0] \\ &= (y_1\delta_0(x_0, x_1)y_0z - y_0y_1\delta_0(x_0, x_1)z)[y_1\delta_0(x_0, x_1), y_0] = 0 \end{aligned}$$

za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$ in $z \in \mathcal{A}$, saj je $y_1\delta_0(x_0, x_1) \in \mathcal{A}_0$. Glede na to, da je \mathcal{A} polpraalgebra, je $[y_1\delta_0(x_0, x_1), y_0] = 0$ za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Na podoben način vidimo, da je tudi

$$[\delta_0(x_0, x_1)y_1, y_0]z[\delta_0(x_0, x_1)y_1, y_0] = 0,$$

in zato je $[\delta_0(x_0, x_1)y_1, y_0] = 0$ za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. S tem smo pokazali, da je

$$\mathcal{A}_1\delta_0(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1), \delta_0(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}_0). \quad (3.44)$$

Po lemi 3.27 je

$$\delta_0(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)^2 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \quad (3.45)$$

Naj bo $u_0 \in \mathcal{U}_0$. S pomočjo enakosti (3.43) vidimo, da je

$$\delta_0(u_0, x_1)y_1 \perp v$$

za vse $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ in $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$, saj je

$$\delta_0(u_0, x_1)y_1v \in \delta_0(u_0, x_1)\mathcal{A}[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0.$$

Po lemi 3.29 sledi $\delta_0(u_0, x_1)y_1 \circ_s D_0(v) = 0$. Torej je

$$\delta_0(u_0, x_1)y_1D_0(v) + D_0(v)\delta_0(u_0, x_1)y_1 = 0. \quad (3.46)$$

V pravkar zapisani enakosti zamenjajmo element y_1 z elementom $\delta_0(u_0, x_1)$. Pri tem upoštevajmo relacijo (3.45). Torej je

$$\delta_0(u_0, x_1)^2D_0(v) = 0 \quad (3.47)$$

za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Ni težko videti, da je

$$\begin{aligned} (\delta_0(u_0, x_1)y_1)^2 &= \delta_0(u_0, x_1)y_1(D_0(u_0x_1) \\ &\quad - D_0(u_0)x_1 - u_0D_0(x_1))y_1 \\ &= \delta_0(u_0, x_1)y_1(D_0(u_0x_1) - D_0(u_0)x_1)y_1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

za vsaka elementa $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$, pri čemer upoštevamo relacijo (3.43). Če v pravkar zapisani enakosti namesto y_1 pišemo $\delta_0(u_0, x_1)$ in upoštevamo identiteto (3.47), opazimo, da je $\delta_0(u_0, x_1)^4 = 0$. Ponovno upoštevajmo relacijo (3.45), iz česar sledi, da je $\delta_0(u_0, x_1)^2 = 0$, saj je \mathcal{A} polpraalgebra. Nadalje, naj bo $v \in \mathcal{U}_1$. Pomnožimo enakost (3.46) na levi strani z elementom $\delta_0(u_0, x_1)y_1$. Potem s pomočjo (3.44) pridemo do enakosti

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_0(u_0, x_1)y_1)^2D_0(v) + \delta_0(u_0, x_1)y_1(D_0(v)\delta_0(u_0, x_1))y_1 \\ &= (\delta_0(u_0, x_1)y_1)^2D_0(v) + D_0(v)\delta_0(u_0, x_1)^2y_1^2 \\ &= (\delta_0(u_0, x_1)y_1)^2D_0(v). \end{aligned}$$

Če je $v \in \mathcal{U}_0$, je $\delta_0(u_0, x_1)y_1 D_0(v) = 0$ glede na enakost (3.46), pri čemer ponovno upoštevamo relacijo (3.44). Pomnožimo identiteto (3.48) z leve strani z elementom $\delta_0(u_0, x_1)y_1$. Pri tem upoštevajmo $(\delta_0(u_0, x_1)y_1)^2 D_0(v) = 0$ za vse $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$. Torej je $(\delta_0(u_0, x_1)y_1)^3 = 0$. Ponovno upoštevajmo relacijo (3.44). Potem je

$$(\delta_0(u_0, x_1)y_1)\mathcal{A}_0(\delta_0(u_0, x_1)y_1)\mathcal{A}_0(\delta_0(u_0, x_1)y_1) = 0.$$

Iz tega sledi, da je $\delta_0(u_0, x_1)y_1 = 0$ za vsak $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$, saj je \mathcal{A}_0 polpraalgebra. S pomočjo leme 3.26 (točka (i)) opazimo, da je $\delta_0(u_0, x_1) = 0$ za vsak $u_0 \in \mathcal{U}_0$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Na podoben način lahko pokažemo, da je $\delta_0(x_0, u_1) = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $u_1 \in \mathcal{U}_1$. Namreč, glede na relacijo (3.43) vidimo, da je $\delta_0(u_1, x_0)y_1 \perp v$ za vse $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem po lemi 3.29 sledi, da je $\delta_0(u_1, x_0)y_1 \circ_s D_0(v) = 0$. Torej je

$$\delta_0(u_1, x_0)y_1 D_0(v) + D_0(v)\delta_0(u_1, x_0)y_1 = 0. \quad (3.49)$$

Analogno kot prej zamenjajmo element y_1 z elementom $\delta_0(u_1, x_0)$ in pri tem upoštevajmo relacijo (3.45). Dobimo

$$\delta_0(u_1, x_0)^2 D_0(v) = 0 \quad (3.50)$$

za vse $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Ni težko preveriti, da je

$$\begin{aligned} (\delta_0(u_1, x_0)y_1)^2 &= \delta_0(u_1, x_0)y_1(D_0(u_1x_0) \\ &\quad - D_0(u_1)x_0 - u_1D_0(x_0))y_1 \\ &= \delta_0(u_1, x_0)y_1(D_0(u_1x_0) - D_0(u_1)x_0)y_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

za vsaka $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $y_1 \in \mathcal{A}_1$, pri tem upoštevamo relacijo (3.43). Ponovno namesto y_1 pišemo $\delta_0(u_1, x_0)$ in upoštevamo enakost (3.50). Potem je $\delta_0(u_1, x_0)^4 = 0$. S pomočjo relacije (3.45) sledi, da je $\delta_0(u_1, x_0)^2 = 0$, saj je \mathcal{A} polpraalgebra. Predpostavimo najprej, da je $v \in \mathcal{U}_1$. Pomnožimo enakost (3.49) na levi strani z elementom $\delta_0(u_1, x_0)y_1$. S pomočjo pokazane relacije (3.44) ni težko videti, da je

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_0(u_1, x_0)y_1)^2 D_0(v) + \delta_0(u_1, x_0)y_1(D_0(v)\delta_0(u_1, x_0))y_1 \\ &= (\delta_0(u_1, x_0)y_1)^2 D_0(v) + D_0(v)\delta_0(u_1, x_0)^2 y_1^2 \\ &= (\delta_0(u_1, x_0)y_1)^2 D_0(v). \end{aligned}$$

Če je $v \in \mathcal{U}_0$, je $\delta_0(u_1, x_0)y_1 D_0(v) = 0$ glede na (3.44) in (3.49). S tem smo pokazali, da je $(\delta_0(u_1, x_0)y_1)^2 D_0(v) = 0$ za vse $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$. Pomnožimo identiteto (3.51) z leve strani z elementom $\delta_0(u_1, x_0)y_1$ in pri tem upoštevajmo pravkar dobljeno lastnost. Potem je $(\delta_0(u_1, x_0)y_1)^3 = 0$. Glede na relacijo (3.44) sledi, da je

$$(\delta_0(u_1, x_0)y_1)\mathcal{A}_0(\delta_0(u_1, x_0)y_1)\mathcal{A}_0(\delta_0(u_1, x_0)y_1) = 0.$$

Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, je $\delta_0(u_1, x_0)y_1 = 0$ za vsak $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Po lemi 3.26 (točka (i)) sledi, da je $\delta_0(u_1, x_0) = 0$ za vsak $u_1 \in \mathcal{U}_0$ ter $x_0 \in \mathcal{A}_0$. S tem smo pokazali

$$\delta_0(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = \delta_0(\mathcal{U}_1, \mathcal{A}_0) = 0. \quad (3.52)$$

Naj bosta $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Upoštevajmo, da je $x_1^2 \in \mathcal{A}_0$. Glede na enakost (3.52) je $\delta_0(x_1^2, u_1) = 0$. Ni težko preveriti, da je

$$D_0([x_1^2, u_1]) = [D_0(x_1^2), u_1] + [x_1^2, D_0(u_1)].$$

Po drugi strani pa vidimo, da je

$$D_0([x_1^2, u_1]) = [D_0(x_1)x_1 + x_1 D_0(x_1), u_1] + [x_1^2, D_0(u_1)]$$

po lemi 3.30 (točka (ii)). Primerjajmo dobljeni identiteti in dobimo $[\delta_0(x_1, x_1), u_1] = 0$ za vsak $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Ker je po lemi 3.31 (točka (i)) $[\delta_0(x_1, x_1), u_0] = 0$ za vsak $u_0 \in \mathcal{U}_0$, je $[\delta_0(x_1, x_1), \mathcal{U}] = 0$ za vsak $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Z linearizacijo pridemo do enakosti

$$[\delta_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1), \mathcal{U}] = 0, \quad (3.53)$$

pri čemer upoštevamo lemo 3.30 (točka (i)). S pomočjo relacije (3.44) in leme 3.31 (točka (i) in točka (ii)) vidimo, da je

$$[x_0 \delta_0(x_1, y_1), y_0] = 0$$

za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Iz tega sledi, da je

$$[x_0, y_0] \delta_0(x_1, y_1) = [x_0 \delta_0(x_1, y_1), y_0] - x_0 [\delta_0(x_1, y_1), y_0] = 0.$$

Torej je

$$[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] \delta_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1) = 0. \quad (3.54)$$

Potem pa je tudi $a_1[x_0, y_0]\delta_0(x_1, y_1) = 0$ za vsak $a_1 \in \mathcal{A}_1$. Upoštevajmo enakost (3.53) in lastnost $a_1[x_0, y_0] \in \mathcal{U}_1$. Iz tega sledi, da je $\delta_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0$. Po drugi strani pa s pomočjo rezultata leme 3.31 (točka (i)) in relacije (3.54) opazimo, da je $\delta_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_0[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0$. To pomeni, da je $\delta_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0$, in zato je

$$[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] \perp \delta_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1). \quad (3.55)$$

Naj bo $u_1 \in \mathcal{U}_1$. Glede na pravkar pokazano lastnost (3.55) je $\delta_0(u_1, x_1) \perp v$ za vsak $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem pa je $\delta_0(u_1, x_1)D_0(\delta_0(u_1, x_1)v) = 0$. S pomočjo enakosti (3.42) in (3.52) vidimo, da je $\delta_0(u_1, x_1)^2 D_0(v) = 0$. Pri tem upoštevamo, da je $\delta_0(u_1, x_1)D_0(\delta_0(u_1, x_1))v = 0$ glede na (3.55). Prav tako je

$$\delta_0(u_1, x_1)^3 = \delta_0(u_1, x_1)^2 (D_0(u_1 x_1) - D_0(u_1)x_1 - u_1 D_0(x_1)) \quad (3.56)$$

Ponovno upoštevajmo, da je \mathcal{A}_0 polpraalgebra in da je $\delta_0(u_1, x_1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_0)$ po lemi 3.31 (točka (i)). Iz tega sledi, da je $\delta_0(u_1, x_1) = 0$ za vsak $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Torej je

$$\delta_0(\mathcal{U}_1, \mathcal{A}_1) = 0.$$

S omočjo pokazanega pridemo do zelenega rezultata, $\delta_0(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$. S tem je dokaz zaključen. \square

Jordanska superodvajanja stopnje 1

Lema 3.33. *Naj bo \mathcal{A} asociativna algebra, \mathcal{B} podalgebra algebre \mathcal{A} in naj bo \mathcal{M} \mathcal{A} -bimodul. Predpostavimo, da je $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ taka linearna preslikava, da je $D(b \circ a) = D(b) \circ a + b \circ D(a)$ za vse $b \in \mathcal{B}, a \in \mathcal{A}$. Potem je*

$$[b, b']\mathcal{A}[b, b']\mathcal{A}(D(bb') - D(b)b' - bD(b')) = 0$$

za vse $b, b' \in \mathcal{B}$.

Dokaz. Upoštevajmo, da je $2b \circ (b \circ a) - b^2 \circ a = bab$ za vse $b \in \mathcal{B}, a \in \mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je $D(bab) = D(b)ab + bD(a)b + baD(b)$ za vse $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$. S pomočjo linearizacije te enakosti dobimo $D(bab' + b'ab) = D(b)ab' + bD(a)b' + baD(b') + D(b')ab + b'D(a)b +$

$b'aD(b)$ za vse $a \in \mathcal{A}$, $b, b' \in \mathcal{B}$. Naj bodo $a \in \mathcal{A}$, $b, b' \in \mathcal{B}$ in naj bo $W = D(bb'ab'b + b'babbb')$. Potem je

$$\begin{aligned} W &= D(b(b'ab')b) + D(b'(bab)b') \\ &= D(b)b'ab'b + bD(b')ab'b + bb'D(a)b'b + bb'aD(b')b + bb'ab'D(b) \\ &\quad + D(b')babbb' + b'D(b)abb' + b'bD(a)bb' + b'baD(b)b' + b'babD(b'). \end{aligned}$$

Po drugi strani je

$$\begin{aligned} W &= D((bb')a(b'b) + (b'b)a(bb')) \\ &= D(bb')ab'b + bb'D(a)b'b + bb'aD(b'b) \\ &\quad + D(b'b)abb' + b'bD(a)bb' + b'baD(bb'). \end{aligned}$$

Primerjajmo obe identiteti in upoštevajmo, da je $D(b \circ b') = D(b) \circ b' + b \circ D(b')$. Torej je

$$\begin{aligned} &(D(bb') - D(b)b' - bD(b'))a[b, b'] \\ &+ [b, b']a(D(bb') - D(b)b' - bD(b')) = 0 \end{aligned}$$

za vse $a \in \mathcal{A}$, $b, b' \in \mathcal{B}$. S tem smo pokazali, da je $mac + cam = 0$ za vse $a \in \mathcal{A}$, kjer je $c = [b, b']$ in $m = D(bb') - D(b)b' - bD(b')$. Ni težko videti, da je potem $c\mathcal{A}c\mathcal{A}m = 0$. Dokaz je zaključen. \square

Lema 3.34. *Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra in naj bo $D : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_1$ taka linearna preslikava, da je $D(x \circ y) = D(x) \circ y + x \circ D(y)$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}_0$. Potem je*

$$[x, y] \perp (D(zw) - D(z)w - zD(w))$$

za vse $w, x, y, z \in \mathcal{A}_0$.

Dokaz. Glede na lemo 3.33 ($\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}$ in $\mathcal{M} = \mathcal{A}_1$) je

$$\begin{aligned} &[x, y]\mathcal{A}_0[x, y]\mathcal{A}_0(D(xy) - D(x)y - xD(y)) = 0, \\ &(D(xy) - D(x)y - xD(y))\mathcal{A}_0[x, y]\mathcal{A}_0[x, y] = 0 \end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathcal{A}_0$. Tako kot v dokazu prejšnje leme pišimo $c = [x, y]$ in $m = D(xy) - D(x)y - xD(y)$. Potem je $(cx_0m)x_1(cx_0m) = 0$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Po lemi 3.26 (točka (i)) je $c\mathcal{A}_0m = 0$. Analogno vidimo, da je $m\mathcal{A}_0c = 0$. Ponovno upoštevajmo lemo 3.26 (točka (ii)). Potem je $m \perp c$. S pomočjo leme 2.6 sledi zeleni rezultat. \square

Lema 3.35. *Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra in naj bo $a_1 \in \mathcal{A}_1$ tak, da je $\mathcal{U}_0 a_1 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ in $a_1[\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0] = 0$. Potem je $a_1 \mathcal{U} = 0$.*

Dokaz. Glede na predpostavko ni težko videti, da je

$$0 = x(u_0 a_1)[v_0, w_0] = u_0 a_1 x[v_0, w_0]$$

za vse $u_0, v_0, w_0 \in \mathcal{U}_0$ ter $x \in \mathcal{A}$. Sledi enakost $\mathcal{U}_0 a_1 \mathcal{A}[\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0] = 0$. Upoštevajmo, da je $a_1 \mathcal{A}[\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0] \subseteq \mathcal{U}$. Torej je $a_1 \mathcal{A}[\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0] = 0$, pri čemer upoštevamo lemo 3.26 (točka (iii)) in lastnost, da je \mathcal{U}_0 polpraalgebra. Potem je

$$0 = a_1 y[u_0, x_0 v_0] - a_1 y x_0[u_0, v_0] = a_1 y[u_0, x_0] v_0$$

za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y \in \mathcal{A}$. Torej je $a_1 \mathcal{A}[\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_0] \mathcal{U}_0 = 0$. Ponovno upoštevajmo, da je \mathcal{U}_0 polpraalgebra ter lemo 3.26 (točka (iiii)). Potem je $a_1 \mathcal{A}[\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_0] = 0$. Iz tega sledi, da je

$$0 = a_1 y[z_0 u_0, x_0] - a_1 y z_0[u_0, x_0] = a_1 y[z_0, x_0] u_0$$

za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_0, z_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y \in \mathcal{A}$. S tem smo pokazali, da je $a_1 \mathcal{A}[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] \mathcal{U}_0 = 0$. Velja $a_1 \mathcal{A}[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] \subseteq \mathcal{U}$. Ponovno upoštevajmo, da je \mathcal{U}_0 polpraalgebra in lemo 3.26 (točka (iii)), iz česar sledi, da je $a_1 \mathcal{A}[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0$. Torej je $a_1 \mathcal{U} = 0$. \square

Lema 3.36. *Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra in naj bosta $a_0, b_0 \in \mathcal{A}_0$ taka, da je $a_0[\mathcal{A}_0, b_0] = 0$. Potem je $[a_0, b_0] = 0$.*

Dokaz. Ni težko preveriti, da je $0 = a_0[x_0 y_0, b_0] = a_0 x_0[y_0, b_0]$ za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$. Potem je $[a_0, b_0] \mathcal{A}_0[a_0, b_0] = 0$. Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, je $[a_0, b_0] = 0$. \square

V nadaljevanju bomo pokazali, da je $D_1|\mathcal{U}$ superodvajanje stopnje 1.

Izrek 3.37. $\delta_1(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$.

Dokaz. Glede na lemo 3.34 vidimo, da je

$$[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] \perp \delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0).$$

Posebej velja, da je

$$[y_1\delta_1(x_0, y_0), z_0]\mathcal{A}[y_1\delta_1(x_0, y_0), z_0] = 0$$

za vse $x_0, y_0, z_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$, saj je $y_1\delta_1(x_0, y_0) \in \mathcal{A}_0$. Ker je \mathcal{A} polpraalgebra, je $[y_1\delta_1(x_0, y_0), z_0] = 0$. Analogno opazimo, da velja enakost $[\delta_1(x_0, y_0)y_1, z_0] = 0$, saj je

$$[\delta_1(x_0, y_0)y_1, z_0]\mathcal{A}[\delta_1(x_0, y_0)y_1, z_0] = 0.$$

S tem smo pokazali relaciji

$$\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0), \delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}_0). \quad (3.57)$$

Ker je $\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_1$, s pomočjo uporabe leme 3.27 takoj sledi, da je

$$\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)^2 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \quad (3.58)$$

Naj bosta $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$. Potem je $\delta_1(u_0, y_0)y_1 \perp v_0$ za vsak $y_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $y_1 \in \mathcal{A}_0$, pri čemer upoštevamo lemo 3.34. Po lemi 3.29 je $(\delta_1(u_0, y_0)y_1) \circ_s D_1(v_0) = 0$. Torej je

$$\delta_1(u_0, y_0)y_1 D_1(v_0) + D_1(v_0)\delta_1(u_0, y_0)y_1 = 0. \quad (3.59)$$

V pravkar zapisani enakosti zamenjajmo element y_1 z elementom $\delta_1(u_0, y_0)$. Glede na relacijo (3.58) sledi, da je $\delta_1(u_0, y_0)^2 D_1(v_0) = 0$ za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $y_0 \in \mathcal{A}_0$. S pomočjo leme 3.34 ni težko preveriti, da je

$$\begin{aligned} (\delta_1(u_0, y_0)y_1)^2 &= \delta_1(u_0, y_0)y_1(D_1(u_0y_0) \\ &\quad - D_1(u_0)y_0 - u_0D_1(y_0))y_1 \\ &= \delta_1(u_0, y_0)y_1(D_1(u_0y_0) - D_1(u_0)y_0)y_1 \end{aligned} \quad (3.60)$$

za vsak $y_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$. V tako dobljeni enakosti pišimo namesto y_1 element $\delta_1(u_0, y_0)$ in dobimo $\delta_1(u_0, y_0)^4 = 0$. Ker je po predpostavki \mathcal{A} polpraalgebra in velja relacija (3.58), je $\delta_1(u_0, y_0)^2 = 0$ za vsak $u_0 \in \mathcal{U}_0$ in $y_0 \in \mathcal{A}_0$. Nadalje, pomnožimo z leve strani enakost (3.59) z elementom $\delta_1(u_0, y_0)y_1$. Po (3.57) je

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_1(u_0, y_0)y_1)^2 D_1(v_0) + \delta_1(u_0, y_0)y_1(D_1(v_0)\delta_1(u_0, y_0))y_1 \\ &= (\delta_1(u_0, y_0)y_1)^2 D_1(v_0) + D_1(v_0)\delta_1(u_0, y_0)^2 y_1^2 \\ &= (\delta_1(u_0, y_0)y_1)^2 D_1(v_0). \end{aligned}$$

Pomnožimo z desne identiteto (3.60) z elementom $\delta_1(u_0, y_0)y_1$. Potem je $(\delta_1(u_0, y_0)y_1)^3 = 0$. Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra in velja relacija (3.57), sledi $\delta_1(u_0, y_0)y_1 = 0$ za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $y_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}$. Torej je $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_0)\mathcal{A}_1 = 0$. S pomočjo leme 3.26 (točka (i)) vidimo, da je

$$\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_0) = 0. \quad (3.61)$$

Po lemi 3.31 (točka (vii)) sledi

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1(u_0, x_1)y_1[x_0, y_0v_0] \\ &= \delta_1(u_0, x_1)y_1y_0[x_0, v_0] + \delta_1(u_0, x_1)y_1[x_0, y_0]v_0 \\ 0 &= [x_0, v_0y_0]y_1\delta_1(u_0, x_1) \\ &= v_0[x_0, y_0]y_1\delta_1(u_0, x_1) + [x_0, v_0]y_0y_1\delta_1(u_0, x_1) \end{aligned}$$

za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$ in $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Torej je

$$\delta_1(u_0, x_1)y_1[x_0, y_0]\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0[x_0, y_0]y_1\delta_1(u_0, x_1) = 0.$$

Ker je $\delta_1(u_0, x_1)y_1[y_0, x_0]$, $[y_0, x_0]y_1\delta_1(u_0, x_1) \in \mathcal{U}_1$, je

$$\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0 \quad (3.62)$$

po lemi 3.26 (točka (iii)). Po lemi 3.31 (točke (i), (ii) in (iv)) je

$$\delta_1(u_0, x_1)y_1 - y_1\delta_1(u_0, x_1) = \delta_1(x_1u_0, y_1) - \delta_1(u_0x_1, y_1)$$

za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Iz tega sledi, da je

$$[\delta_1(u_0, x_1)y_1, v_0] = [y_1\delta_1(u_0, x_1), v_0], \quad u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0, x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1.$$

Pomnožimo pravkar zapisano relacijo z desne strani z elementom $z_1[z_0, y_0]$, kjer so $y_0, z_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $z_1 \in \mathcal{A}_1$. Upoštevajmo še, da glede na enakost (3.62) velja $[y_1\delta_1(u_0, x_1), v_0]z_1[z_0, y_0] = 0$. Potem je $[\delta_1(u_0, x_1)y_1, v_0]z_1[z_0, y_0] = 0$ za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $y_0, z_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1, y_1, z_1 \in \mathcal{A}_1$. Zapisano drugače

$$[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{U}_0]\mathcal{A}_1[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0.$$

Po drugi strani s ponovno uporabo enakosti (3.62) vidimo, da je

$$[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]\mathcal{A}_1[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{U}_0] = 0.$$

Iz tega po lemi 3.26 (točka (ii)) sledi, da je

$$[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{U}_0] \perp [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0].$$

Posebej velja, da je

$$[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{U}_0]\mathcal{A}[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{U}_0] = 0,$$

pri čemer upoštevamo relacijo $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] \subseteq \mathcal{U}_0$. Ker je po predpostavki \mathcal{A} polpraalgebra, je $[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{U}_0] = 0$. Na podoben način lahko pokažemo, da velja $[\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1), \mathcal{U}_0] = 0$. Potem s pomočjo leme 3.31 (točke (i), (ii) in (iv)) vidimo, da je

$$[\mathcal{U}_0\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1), \mathcal{U}_0] = [\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0] = 0. \quad (3.63)$$

Upoštevajmo še rezultat leme 3.28. Potem je

$$\mathcal{U}_0\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \quad (3.64)$$

Glede na enakost (3.63) in lemo 3.31 (točka (i)) ni težko preveriti, da je $0 = [u_0x_1, v_0] - u_0[x_1, v_0] = [u_0, v_0]x_1$ za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$ in $x_1 \in \delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)$. S tem smo pokazali enakost $[\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0]\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1) = 0$. Podobno vidimo, da je $\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)[\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0] = 0$, saj je $0 = [x_1u_0, v_0] - [x_1, v_0]u_0 = x_1[u_0, v_0]$.

S pomočjo leme 3.35 opazimo, da je $\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{U} = 0$. Iz tega sledi, da je

$$\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1) \perp [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]. \quad (3.65)$$

V posebnem primeru velja

$$[\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0]\mathcal{A}[\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0] = 0$$

in podobno

$$[\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1), \mathcal{A}_0]\mathcal{A}[\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1), \mathcal{A}_0] = 0.$$

Potem je

$$\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}_0), \quad (3.66)$$

saj je \mathcal{A} polpraalgebra. Glede na lemo 3.27 je

$$\delta_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1)^2 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \quad (3.67)$$

Naj bodo $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ ter $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je $\delta_1(u_1, x_1)y_1 \perp v$ glede na relacijo (3.65). Po lemi 3.29 je

$$\delta_1(u_1, x_1)y_1 D_1(v) + D_1(v)\delta_1(u_1, x_1)y_1 = 0. \quad (3.68)$$

Zamenjajmo v tej identiteti element y_1 z elementom $\delta_1(u_1, x_1)$. Potem je

$$\delta_1(u_1, x_1)^2 D_1(v) = 0$$

za vse $v \in \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$, pri čemer upoštevamo (3.67). Vidimo, da je

$$\begin{aligned} (\delta_1(u_1, x_1)y_1)^2 &= \delta_1(u_1, x_1)y_1(D_1(u_1x_1) \\ &\quad - D_1(u_1)x_1 + u_1D_1(x_1))y_1 \\ &= \delta_1(u_1, x_1)y_1(D_1(u_1x_1) - D_1(u_1)x_1)y_1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

za vsak $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Z zamenjavo elementa y_1 z elementom $\delta_1(u_1, x_1)$ opazimo, da je $\delta_1(u_1, x_1)^4 = 0$. Potem pa je $\delta_1(u_1, x_1)\mathcal{A}\delta_1(u_1, x_1) = 0$. Ponovno upoštevajmo, da je \mathcal{A} polpraalgebra. Torej je $\delta_1(u_1, x_1)^2 = 0$ za vse $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Nadalje, naj bo $v \in \mathcal{U}_0$. Pomnožimo relacijo (3.68) na levi strani z elementom $\delta_1(u_1, x_1)y_1$ in upoštevajmo (3.66). Torej je

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_1(u_1, x_1)y_1)^2 D_1(v) + \delta_1(u_1, x_1)y_1(D_1(v)\delta_1(u_1, x_1)) \\ &= (\delta_1(u_1, x_1)y_1)^2 D_1(v) + D_1(v)\delta_1(u_1, x_1)^2 y_1^2 \\ &= (\delta_1(u_1, x_1)y_1)^2 D_1(v). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Če je $v \in \mathcal{U}_1$, je $\delta_1(u_1, x_1)y_1 D_1(v) = 0$ glede na (3.66) in (3.68). S pomočjo enakosti (3.69) opazimo, da je $(\delta_1(u_1, x_1)y_1)^3 = 0$. Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra in velja relacija (3.66), je $\delta_1(u_1, x_1)y_1 = 0$ za vse $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$ ter $u_1 \in \mathcal{U}_1$. Glede na lemo 3.26 (točka (i)) je

$$\delta_1(\mathcal{U}_1, \mathcal{A}_1) = 0. \quad (3.71)$$

Oglejmo si rezultat leme 3.31 (točka (iii)) in upoštevajmo pravkar pokazano. Ni težko videti, da je $\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{U}_1)\mathcal{A}_1 = 0$. V nadaljevanju nas ta lastnost privede do enakosti $\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{U}_1)\mathcal{A}\mathcal{A}_1 = 0$. Torej je

$$\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{U}_1) \perp \mathcal{A}_1. \quad (3.72)$$

Z uporabo leme 3.29 vidimo, da drži enakost $\delta_1(x_0, u_1) \circ_s D_1(x_1) = 0$. To pomeni, da je

$$\delta_1(x_0, u_1)D_1(x_1) + D_1(x_1)\delta_1(x_0, u_1) = 0 \quad (3.73)$$

za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$ in $u_1 \in \mathcal{U}_1$. Seveda je glede na (3.72) tudi $\delta_1(x_0, u_1)y_0 \perp x_1$ za vsak $y_0 \in \mathcal{A}_0$. Ponovno upoštevajmo lemo 3.29, iz česar sledi, da je $(\delta_1(x_0, u_1)y_0) \circ_s D_1(x_1) = 0$. Torej je

$$\delta_1(x_0, u_1)y_0 D_1(x_1) + D_1(x_1)\delta_1(x_0, u_1)y_0 = 0 \quad (3.74)$$

za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$ in $u_1 \in \mathcal{U}_1$. Pomnožimo na desni strani izraz (3.73) z elementom $y_0 \in \mathcal{A}_0$. Tako dobljeno identiteto primerjajmo z izrazom (3.74) in dobimo $\delta_1(x_0, u_1)[y_0, D_1(x_1)] = 0$ za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Glede na lemo 3.36 takoj sledi, da je $[\delta_1(x_0, u_1), D_1(x_1)] = 0$. Potem je

$$\begin{aligned} \delta_1(x_0, u_1)y_0, D_1(x_1)] &= \delta_1(x_0, u_1)[y_0, D_1(x_1)] \\ &\quad + [\delta_1(x_0, u_1), D_1(x_1)]y_0 = 0 \end{aligned}$$

za vsak $y_0 \in \mathcal{A}_0$. S pomočjo izraza (3.74) sledi, da je

$$\delta_1(x_0, u_1)\mathcal{A}_0 D_1(x_1) = 0$$

za vse $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Po enakosti (3.72) je

$$\begin{aligned} \delta_1(x_0, u_1)y_0\delta_1(x_0, u_1) &= \delta_1(x_0, u_1)y_0(D_1(x_0u_1) \\ &\quad - D_1(x_0)u_1 - x_0D_1(u_1)) = 0. \end{aligned}$$

Ponovno upoštevajmo, da je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, iz česar sledi, da je

$$\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{U}_1) = 0. \quad (3.75)$$

S pomočjo leme 3.31 (točki (ii) in (iv)), pri čemer je $y_1 \in \mathcal{U}_1$, in relacije (3.71) opazimo, da je $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0$. Potem pa je $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_0\mathcal{U}_1 = 0$ in $\mathcal{U}_1\mathcal{A}_0\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0$. Glede na lemo 3.26 (točka (ii)) sledi, da je $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}\mathcal{U}_1 = 0$, in zato je

$$\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) \perp \mathcal{U}_1. \quad (3.76)$$

Izberimo poljubna elementa $u_0 \in \mathcal{U}_0$ in $u_1 \in \mathcal{U}_1$. Glede na pravkar pokazano relacijo opazimo, da je tudi $\delta_1(u_0, x_1)y_0 \perp u_1$ za vsak $y_0 \in \mathcal{A}_0$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. V nadaljevanju upoštevajmo enakosti (3.75). Dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= D_1((\delta_1(u_0, x_1)y_0)u_1) \\ &= D_1(\delta_1(u_0, x_1)y_0)u_1 + \delta_1(u_0, x_1)y_0 D_1(u_1). \end{aligned}$$

Pomnožimo pravkar zapisano identiteto z leve strani z elementom $\delta_1(u_0, x_1)z_0$, kjer je $z_0 \in \mathcal{A}_0$ in upoštevajmo relacijo (3.76). Iz tega sledi, da je

$$\delta_1(u_0, x_1)z_0\delta_1(u_0, x_1)y_0D_1(u_1) = 0.$$

Ni težko videti, da je prav tako

$$\delta_1(u_0, x_1)y_0D_1(u_1)\mathcal{A}_0\delta_1(u_0, x_1)y_0D_1(u_1) = 0$$

za vse $y_0 \in \mathcal{A}_0$, $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Torej je

$$\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_0D_1(\mathcal{U}_1) = 0, \quad (3.77)$$

saj je \mathcal{A}_0 polpraalgebra. V naslednjem koraku dokaza s pomočjo relacije (3.76) vidimo, da je $\delta_1(u_0, x_1)v_0 \perp y_1$ za vsak $v_0 \in \mathcal{U}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Po lemi 3.29 sledi, da je

$$\delta_1(u_0, x_1)v_0D_1(y_1) + D_1(y_1)\delta_1(u_0, x_1)v_0 = 0. \quad (3.78)$$

Ker je prav tako $x_0\delta_1(u_0, x_1)v_0 \perp y_1$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$, po lemi 3.29 sledi, da je

$$x_0\delta_1(u_0, x_1)v_0D_1(y_1) + D_1(y_1)x_0\delta_1(u_0, x_1)v_0 = 0 \quad (3.79)$$

za vse $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$. Pomnožimo izraz (3.78) z leve strani z elementom x_0 in primerjajmo dobljeno identiteto z že pokazano enakostjo (3.79). Ni težko videti, da je potem

$$[\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)]\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{U}_0 = 0.$$

Ker je

$$[\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)]\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{U}_0,$$

je

$$[\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)]\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0,$$

pri čemer upoštevamo, da je \mathcal{U}_0 polpraalgebra. Iz tega pa kaj hitro sledi, da je tudi

$$\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)[\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)] = 0.$$

Namreč,

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)]\mathcal{A}_0\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) &\subseteq [\mathcal{A}_0^2, D_1(\mathcal{A}_1)]\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) \\ &+ \mathcal{A}_0[\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)]\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0, \end{aligned}$$

iz česar sledi $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)[\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)]\mathcal{A}_0\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)[\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)] = 0$. Upoštevajmo, da je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, kar nas privede do zelene enakosti. Potem je po lemi 3.36 $[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1), D_1(\mathcal{A}_1)] = 0$. Iz tega sledi, da je $[\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_0, D_1(\mathcal{A}_1)] = 0$. S pomočjo izraza (3.78) dobimo $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{U}_0D_1(\mathcal{A}_1) = 0$. S pomočjo (3.76) pridemo do enakosti

$$\begin{aligned} \delta_1(u_0, x_1)v_0\delta_1(u_0, x_1) &= \delta_1(u_0, x_1)v_0(D_1(u_0x_1) \\ &\quad - D_1(u_0)x_1 - u_0D_1(x_1)) = 0 \end{aligned}$$

za vsak $v_0 \in \mathcal{U}_0$. Posebej velja $v_0\delta_1(u_0, x_1)\mathcal{U}_0v_0\delta_1(u_0, x_1) = 0$. Ker je \mathcal{U}_0 polpraalgebra, je $\mathcal{U}_0\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0$. Iz tega sledi, da je $\mathcal{U}\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0$, saj je tudi $\mathcal{U}_1\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0$. Na podoben način vidimo, da je $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{U} = 0$. Glede na enakost (3.61) je

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1(u_0, x_1)x_0D_1((\delta_1(u_0, x_1)y_0)v_0) \\ &= \delta_1(u_0, x_1)x_0\delta_1(u_0, x_1)y_0D_1(v_0) \end{aligned}$$

za vse $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_0$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem pa je

$$(\delta_1(u_0, x_1)x_0D_1(v_0))\mathcal{A}_1(\delta_1(u_0, x_1)x_0D_1(v_0)) = 0.$$

Ker je $\delta_1(u_0, x_1)x_0D_1(v_0) \subseteq \mathcal{A}_1$, z uporabo leme 3.26 (točka (i)) opazimo, da drži enakost $\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_0D_1(\mathcal{U}_0) = 0$. S pomočjo že znane identitete (3.77) vidimo, da je

$$\begin{aligned} \delta_1(u_0, x_1)x_0\delta_1(u_0, x_1) &= \delta_1(u_0, x_1)x_0(D_1(u_0x_1) \\ &\quad - D_1(u_0)x_1 - u_0D_1(x_1)) = 0. \end{aligned}$$

To pomeni, da je $\delta_1(u_0, x_1)\mathcal{A}_0\delta_1(u_0, x_1) = 0$ za vse $u_0 \in \mathcal{U}_0$ in $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Iz tega sledi

$$\delta_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{A}_1) = 0,$$

saj je \mathcal{A}_0 polpraalgebra. Torej je $\delta_1(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$. Dokaz je zaključen. \square

Naslednji rezultat obravnava jordansko superodvajanje na polpra-superalgebri.

Izrek 3.38. *Naj bo \mathcal{A} asociativna polpra-superalgebra in naj bo $D = D_0 + D_1$ jordansko superodvajanje na \mathcal{A} . Potem obstajata taka gradirana ideala \mathcal{U} in \mathcal{V} superalgebre \mathcal{A} , da je $D_k(ux) = D_k(u)x + (-1)^{k|u|}uD_k(x)$, $k = 0, 1$, za vse $u \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{A}$ in $[v_0, x_0] = 0$ za vse $v_0 \in \mathcal{V}_0$ ter $x_0 \in \mathcal{A}_0$. Velja še več, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = 0$ in $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ je bistven ideal superalgebre \mathcal{A} .*

Dokaz. Naj bo \mathcal{U} gradiran ideal algebre \mathcal{A} generiran z $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]$. S pomočjo izreka 3.32 in izreka 3.37 vidimo, da je

$$\begin{aligned} D(ux) &= D_0(ux) + D_1(ux) \\ &= D_0(u)x + uD_0(x) + D_1(u)x + (-1)^{|u|}uD_1(x) \end{aligned}$$

za vse homogene elemente $u \in \mathcal{U}$ in $x \in \mathcal{A}$. To pomeni, da je $D|\mathcal{U}$ vsota superodvajanja stopnje 0 ter superodvajanja stopnje 1.

Naj bo $\mathcal{V} = \text{Ann}(\mathcal{U})$. Izberimo poljuben $v_0 \in \mathcal{V}_0$. Potem je

$$[v_0, x_0]y_0[v_0, x_0] = v_0(x_0y_0[v_0, x_0]) - x_0v_0(y_0[v_0, x_0]) = 0$$

za vse $v_0 \in \mathcal{V}_0$, $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_0$, saj je $y_0[v_0, x_0]$, $x_0y_0[v_0, x_0] \in \mathcal{U}_0$. Ker je \mathcal{A}_0 polpraalgebra, je $[v_0, x_0] = 0$ za vse $v_0 \in \mathcal{V}_0$ ter $x_0 \in \mathcal{A}_0$.

V nadaljevanju pokažimo, da je

$$\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) \perp [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]. \quad (3.80)$$

Obravnavajmo izraz $D_1(u_0x_0y_1)$, kjer so $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $x_0 \in \mathcal{A}_0$ in $y_1 \in \mathcal{A}_1$. Po eni strani vidimo, da je

$$D_1(u_0(x_0y_1)) = D_1(u_0)x_0y_1 + u_0D_1(x_0y_1),$$

po drugi strani pa velja

$$\begin{aligned} D_1((u_0x_0)y_1) &= D_1(u_0x_0)y_1 + u_0x_0D_1(y_1) \\ &= D_1(u_0)x_0y_1 + u_0D_1(x_0)y_1 + u_0x_0D_1(y_1). \end{aligned}$$

Če primerjamo obe enakosti, vidimo, da je $\mathcal{U}_0\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) = 0$. Posebej velja, da je

$$[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1]_0\mathcal{A}_0\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_1[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) = 0.$$

Glede na lemo 3.26 (točka (i)) je $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]\mathcal{A}_1\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) = 0$. Potem pa je $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]\mathcal{A}\delta_1(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) = 0$, kar nas vodi do zelenega zaključka.

Predpostavimo, da je $\mathcal{U} = 0$. Ker je \mathcal{U} gradiran ideal generiran z $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0]$, je $[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] = 0$. Torej je \mathcal{A}_0 je komutativna algebra. Ni težko videti, da velja $\delta_0(x, y), \delta_1(x, y) \in \mathcal{V}$ za vse $x, y \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, pri čemer upoštevamo relacije (3.42), (3.43), (3.55), (3.65), (3.80) ter lemo 3.34. Potem pa iz enakosti $\mathcal{V} = 0$ sledi, da je D superodvajanje.

Očitno je $\mathcal{U}\mathcal{V} = 0$. Torej je $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = 0$, saj je \mathcal{A} polpraalgebra. Predpostavimo, da je $(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{I} = 0$ za nek gradiran ideal \mathcal{I} superalgebre \mathcal{A} . Iz tega sledi, da je $\mathcal{U}\mathcal{I} = \mathcal{V}\mathcal{I} = 0$. Potem pa je $\mathcal{I} \subseteq \text{Ann}(\mathcal{U}) \cap \text{Ann}(\mathcal{V}) = \text{Ann}(\mathcal{U}) \cap \text{Ann}(\text{Ann}(\mathcal{U})) = 0$. S tem smo pokazali, da je $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ bistven ideal algebre \mathcal{A} . Dokaz je zaključen. \square

Izrek 3.38 nam zagotavlja obstoj takih gradiranih idealov \mathcal{U} in \mathcal{V} supralgebre \mathcal{A} , da je zožitev jordanskega superodvajanja D na ideal \mathcal{U} superodvajanje, sodi del ideala \mathcal{V} pa je komutativen. V splošnem ne obstajata taka prava ideala \mathcal{U} in \mathcal{V} superalgebre \mathcal{A} , da bi bila njuna direktna vsota enaka celi algebri \mathcal{A} .

Primer 3.39. Naj bosta $A = A_0 \oplus A_1$ in $B = B_0 \oplus B_1$ taki asociativni pra-superalgebri, da zadoščata pogojem: A in B ne vsebujeta identitete, A_0 je nekomutativna algebra, B je komutativna algebra in $B_1 \neq 0$. Na primer, A je trivialna superalgebra operatorjev končnega ranga na neskončno dimenzionalnem vektorskem prostoru (nad poljem Φ), $B = X\Phi[X]$ pa je superalgebra polinomov (s konstanto 0) z gradacijo $B_0 = \Phi[X^2]$ in $B_1 = X\Phi[X^2]$. Naj bo $\mathcal{A} = A \oplus B \oplus \Phi$. Algebra \mathcal{A} je polpra-superalgebra z gradacijo $\mathcal{A}_0 = A_0 \oplus B_0 \oplus \Phi$ in $\mathcal{A}_1 = A_1 \oplus B_1$, pri čemer je sodi del nekomutativen. Naj bo $b_0 + b_1 = b \in B$ tak, da je $b_0 \neq 0$. Definirajmo preslikavo $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $D(x_0 + x_1 + y_0 + y_1 + \lambda) = by_1$ za vse $x_0 \in A_0, x_1 \in A_1, y_0 \in B_0, y_1 \in B_1$ in $\lambda \in \Phi$. Potem je D jordansko superodvajanje, ki ni superodvajanje. Ker sta 0 in 1 edina centralna idempotentna algebra \mathcal{A} , \mathcal{A} ne vsebuje taka prava ideala \mathcal{U} in \mathcal{V} , da bi veljalo $\mathcal{A} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Na tem mestu lahko zapišemo glavni rezultat tega poglavja, ki poda odgovor na vprašanje, kakšna je povezava med jordanskim superodvajanjem in superodvajanjem na pra-superalgebri. Rezultat, ki ga bomo zapisali, je posplošitev klasičnega Hersteinovega izreka o jordanskih odvajanjih na praalgebrah.

Posledica 3.40. *Jordansko superodvajanje na asociativni pra-superalgebri je superodvajanje, razen v primeru, ko je njen sodi del komutativen.*

Zapisali bomo nekaj primerov pravih jordanskih superodvajanj, torej takih, ki niso superodvajanja.

Primer 3.41. Naj bo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ asociativna pra-superalgebra, ki je komutativna kot algebra, in naj bo $\mathcal{A}_1 \neq 0$. Nadalje, naj bo $0 \neq a_0 \in \mathcal{A}_0$. Definirajmo preslikavo $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $D(x_0 + x_1) = a_0 x_1$ za vsak $x_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $x_1 \in \mathcal{A}_1$. Potem je D jordansko superodvajanje stopnje 0, ki ni superodvajanje.

Primer 3.42. Naj bo $\mathcal{A} = Q(\alpha, \beta)$ superalgebra kvaternionov. Definirajmo preslikavo $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $D(\lambda_1 1 + \lambda_2 uv + \lambda_3 u + \lambda_4 v) = \lambda_3 u - \lambda_4 v$ za vse $\lambda_i \in \Phi$. Potem je D jordansko superodvajanje stopnje 0, ki ni superodvajanje. Poudarimo, da je tudi v tem primeru \mathcal{A}_0 komutativna algebra, algebra \mathcal{A} pa ni komutativna.

Primer 3.43. Naj bo $\Phi[X]$ algebra polinomov nad poljem Φ in naj bo $\mathcal{A} = \Phi[X] \oplus \Phi[X]$ superalgebra z gradacijo $\mathcal{A}_0 = \Phi[X] \oplus 0$, $\mathcal{A}_1 = 0 \oplus \Phi[X]$ ter množenjem definiranim s predpisom $(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) = (p_1 p_2 + q_1 q_2, p_1 q_2 + q_1 p_2)$, $p_1, q_1 \in \Phi[X]$. Definirajmo preslikavo $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $D(p, q) = (0, p')$ (pri čemer je p' odvod polinoma p) za vse $(p, q) \in \mathcal{A}$. Potem je D jordansko superodvajanje stopnje 1, ki ni superodvajanje.

3.4 Jordanska ϵ -odvajanja

V tem razdelku bomo podrobneje obravnavali posplošitve klasičnih Hersteinovih rezultatov o jordanskih odvajanjih algeber in jordanskih superodvajanjih superalgeber na gradirane algebre. Tako bomo v nadaljevanju usmerili pozornost na povezavo med jordanskimi ϵ -odvajaji in ϵ -odvajaji na asociativnih gradiranih algebrah. Glavne ideje raziskave bodo podobne kot do sedaj. Vsekakor so na določenih mestih obravnave opazne očitne razlike.

Naj bo v nadaljevanju \mathcal{A} asociativna algebra gradirana z grupo G , ϵ fiksen bikarakter za G in $k \in G$.

Definicija 3.44. Φ -modulski homomorfizem $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ je ϵ -odvajanje stopnje k , če je $D_k(\mathcal{A}_g) \subseteq \mathcal{A}_{kg}$ in

$$D_k(xy) = D_k(x)y + \epsilon(k, x)x D_k(y), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}).$$

Definicija 3.45. Φ -modulski homomorfizem $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ je jordanско ϵ -odvajanje stopnje k , če je $D_k(\mathcal{A}_g) \subseteq \mathcal{A}_{kg}$ in

$$D_k(x \circ_\epsilon y) = D_k(x) \circ_\epsilon y + \epsilon(k, x)x \circ_\epsilon D_k(y), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}).$$

ϵ -Odvajanje na gradirani algebri \mathcal{A} je končna vsota ϵ -odvajanj različnih stopenj na \mathcal{A} . Podobno, jordanско ϵ -odvajanje na \mathcal{A} končna vsota jordanških ϵ -odvajanj različnih stopenj na \mathcal{A} . Vsako ϵ -odvajanje je seveda tudi jordanско ϵ -odvajanje. V duhu dosedanjih rezultatov se tudi na tem področju postavi vprašanje, kdaj velja obratna zveza.

Naj bo

$$\delta_k(x, y) = D_k(xy) - D_k(x)y - \epsilon(k, x)x D_k(y)$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. V posebnem primeru, ko je element x vsebovan v algebri \mathcal{A}_1 , je $\delta_k(x, y) = D_k(xy) - D_k(x)y - x D_k(y)$. Očitno je δ_k ϵ -odvajanje stopnje k natanko tedaj, ko je $\delta_k(x, y) = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Z direktnim računom lahko preverimo, da je

$$\delta_k(x, y) = -\epsilon(x, y)\delta_k(y, x), \quad (3.81)$$

$$\delta_k(xy, z) + \delta_k(x, y)z = \delta_k(x, yz) + \epsilon(k, x)x\delta_k(y, z) \quad (3.82)$$

za vse $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Glede na enakost (3.81) vidimo, da je $\delta_k(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_h) = 0$ natanko tedaj, ko je $\delta_k(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}_g) = 0$, $g, h \in G$. S pomočjo relacije (3.2) in definicije jordanškega ϵ -odvajanja sledi, da je

$$D_k([x, y]_\epsilon, z)_\epsilon = [[D_k(x), y]_\epsilon, z]_\epsilon + \epsilon(k, x)[[x, D_k(y)]_\epsilon, z]_\epsilon + \epsilon(k, xy)[[x, y]_\epsilon, D_k(z)]_\epsilon. \quad (3.83)$$

Lema 3.46. Naj bodo $p, q, r \in G$. Če je $\delta_k(\mathcal{A}_{pq}, \mathcal{A}_r) = 0$, je $[\delta_k(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_q), \mathcal{A}_r]_\epsilon = 0$.

Dokaz. Naj bodo $x \in \mathcal{A}_p$, $y \in \mathcal{A}_q$ in $z \in \mathcal{A}_r$. Ker je $[x, y]_\epsilon \in \mathcal{A}_{pq}$, sledi

$$\begin{aligned} D_k([x, y]_\epsilon, z)_\epsilon &= D_k([x, y]_\epsilon z) - \epsilon(xy, z)D_k(z[x, y]_\epsilon) \\ &= D_k([x, y]_\epsilon z) + \epsilon(k, xy)[x, y]_\epsilon D_k(z) \\ &\quad - \epsilon(xy, z)D_k(z)[x, y]_\epsilon - \epsilon(kxy, z)z D_k([x, y]_\epsilon) \\ &= [D_k([x, y]_\epsilon), z]_\epsilon + \epsilon(k, xy)[[x, y]_\epsilon, D_k(z)]_\epsilon. \end{aligned}$$

Primerjamo pravkar dobljeno enakost z identiteto (3.83) in pri tem upoštevajmo, da je $D_k(x \circ_\epsilon y) = D_k(x) \circ_\epsilon y + \epsilon(k, x)x \circ_\epsilon D_k(y)$. Potem je $[\delta_k(x, y), z]_\epsilon = 0$ za vse $x \in \mathcal{A}_p$, $y \in \mathcal{A}_q$ ter $z \in \mathcal{A}_r$. Dokaz je zaključen. \square

V nadaljevanju naj bo \mathcal{A} taka gradirana praalgebra, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$. Preden bomo podali glavni rezultat glede povezave med jordan-skim ϵ -odvajanjem in ϵ -odvajanjem, bomo zapisali nekaj lem.

Lema 3.47. Če je $\delta_k(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_+) = 0$, je D_k ϵ -odvajanje.

Dokaz. Glede na predpostavko je tudi $\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_1) = 0$. Po lemi 3.46 sledi

$$[\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0. \quad (3.84)$$

S pomočjo enakosti (3.82) izpeljemo, da je $[\delta_k(x, y)z, \mathcal{A}_1] = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $z \in \mathcal{A}_1$. Ker po enakosti (3.1) in (3.84) velja

$$\delta_k(x, y)[z, w] = [\delta_k(x, y)z, w] - [\delta_k(x, y), w]z = 0,$$

$w \in \mathcal{A}_1$, je $\delta_k(x, y)[z, \mathcal{A}_1] = 0$. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+)[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) = 0. \quad (3.85)$$

Naj bodo $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Pomnožimo identiteto (3.82) z desne strani z aditivno grupo $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$ in pri tem upoštevajmo enakost (3.85). Potem je $\delta_k(x, y)z[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0$. Če pomnožimo enakost (3.82) z leve strani z $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$ in pri tem ponovno upoštevamo relacijo (3.85), dobimo $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]x\delta_k(y, z) = 0$. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\mathcal{A}_+\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) = 0. \quad (3.86)$$

Ponovno upoštevajmo predpostavko, da je $\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_1) = 0$. Po lemi 3.46 sledi

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0. \quad (3.87)$$

S pomočjo enakosti (3.82) pokažemo, da je $[x\delta_k(y, z), z]_\epsilon = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$ in $z \in \mathcal{A}_1$. Z uporabo identitete (3.1) sledi, da je

$$0 = [wx\delta_k(y, z), z]_\epsilon - w[x\delta_k(y, z), z]_\epsilon = [w, z]_\epsilon x\delta_k(y, z)$$

za vse $w \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$, $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$ in $z \in \mathcal{A}_1$. Torej je

$$[\mathcal{A}_+, z]\mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_-, z) = 0 \quad (3.88)$$

za vse $z \in \mathcal{A}_1$. Na podoben način, z uporabo enakosti (3.82) in (3.87) pokažemo, da je $[\delta_k(x, y)z, x]_\epsilon = 0$ za vse $x \in \mathcal{A}_1$, $y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. To nas vodi do sklepa, da je $\delta_k(x, y)z[w, x]_\epsilon = 0$ za vse $w \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_-[\mathcal{A}_+, x] = 0 \quad (3.89)$$

za vse $x \in \mathcal{A}_1$. V nadaljevanju bomo razdelili dokaz na dva dela. Najprej bomo obravnavali primer, ko je $k \in G_+$, potem pa primer, ko je $k \in G_-$.

Primer 1. Predpostavimo, da je $k \in G_+$. Primerjajmo identiteti (3.88) in (3.89) ter pri tem upoštevajmo rezultat leme 1.31 (točka (iii)). Potem je za vsak $x \in \mathcal{A}_1$ $\delta_k(\mathcal{A}_-, x) = 0$ ali $[\mathcal{A}_+, x] = 0$. Ker grupa ni unija svojih pravih podgrup in je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_1) = 0.$$

Po lemi 3.46 je

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0. \quad (3.90)$$

Potem s pomočjo enakosti (3.82) izpeljemo enakost $[\delta_k(x, y)z, \mathcal{A}_1] = 0$ za vse elemente $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, $y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $z \in \mathcal{A}_1$. Glede na relaciji (3.1) in (3.90) sledi $\delta_k(x, y)[z, \mathcal{A}_1] = 0$. To pomeni, da je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+)[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0. \quad (3.91)$$

Naj bodo $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$ in $y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Pomnožimo enakost (3.82) z desne strani z $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$. Pri tem upoštevajmo identiteti (3.85) in (3.91). Dobimo $\delta_k(x, y)z[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0$. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] = 0. \quad (3.92)$$

Naj bodo $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Ponovno pomnožimo enakost (3.82) z $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]$, tokrat z leve strani. Iz tega glede na relaciji (3.85) in (3.91) sledi, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]x\delta_k(y, z) = 0$. S tem smo pokazali, da je

$$[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1]\mathcal{A}_+\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0 \quad (3.93)$$

(pri tem upoštevamo enakost (3.81)). Primerjajmo enakosti (3.92) in (3.93) ter upoštevajmo rezultat leme 1.31 (točka (iv)). Ni težko videti, da je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0. \quad (3.94)$$

Glede na enakost (3.82) sledi $x\delta_k(y, z) = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$ in $y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Torej je $\mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) = 0$. S pomočjo leme 1.31 (točka (ii)) opazimo, da je $\mathcal{A}_- = 0$ ali $\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) = 0$. Predpostavimo najprej, da je

$$\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) = 0. \quad (3.95)$$

Po lemi 3.46 sledi, da je

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.96)$$

Po (3.82), (3.94) in (3.95) je $[\delta_k(x, y)z, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$ ter $z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. S pomočjo enakosti (3.1) in (3.96) dobimo $\delta_k(x, y)[z, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-)[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = [\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-) = 0. \quad (3.97)$$

Glede na enakost (3.96) je prav tako

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.98)$$

Naj bodo sedaj $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Pomnožimo enakost (3.82) z desne strani z množico $[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon$. Če upoštevamo relaciji (3.94) in (3.97), je $\delta_k(x, y)z[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-)\mathcal{A}_-[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0.$$

Iz tega skupaj z enakostjo (3.98) sledi, da je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-)\mathcal{A}[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0.$$

Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra in je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, je $\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-) = 0$.

Predpostavimo, da je $\mathcal{A}_- = 0$. Potem je očitno $\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-) = 0$. Glede na enakost (3.86) sledi, da je $\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) = 0$, saj je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$

gradirana praalgebra. Glede na pokazano je δ_k ϵ -odvajanje stopnje k na algebri \mathcal{A} , pri čemer je $k \in G_+$.

Primer 2. Predpostavimo, da je $k \in G_-$. Glede na enakost (3.86) in lemo 1.31 (točka (iv)) takoj sledi, da je

$$\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) = 0, \quad (3.99)$$

saj je $\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{A}_-$. Potem s pomočjo leme 3.46 opazimo, da je

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-), \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0. \quad (3.100)$$

Glede na enakosti (3.88), (3.89) in lemo 1.31 (točka (v)) vidimo, da je za vsak $x \in \mathcal{A}_1$ bodisi $[\mathcal{A}_+, x]_\epsilon = 0$ bodisi je $\delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_-, x) = 0$. Iz tega sledi, da je unija množic $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{A}_1 \mid [\mathcal{A}_+, x]_\epsilon = 0\}$ in $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{A}_1 \mid \delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_-, x) = 0\}$ enaka \mathcal{A}_1 . Ker pa je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, velja $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}_1$. Torej obstaja tak element $x \in \mathcal{A}_1$, da je $x \notin \mathcal{B}$. Naš cilj je pokazati enakost množic $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1$. Predpostavimo, da obstaja tak $y \in \mathcal{A}_1$, da je $y \notin \mathcal{C}$. Potem je $x + y, x - y \notin \mathcal{B}$, kar pomeni, da je $x + y, x - y \in \mathcal{C}$. Ni težko razmisliti, da iz tega sledi $y \in \mathcal{C}$. To pa je očitno v nasprotju s predpostavko. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_-, x) = 0 \quad (3.101)$$

za vsak $x \in \mathcal{A}_1$. Glede na relaciji (3.82) in (3.100) opazimo, da je

$$[\delta_k(x, y)z, w]_\epsilon = [\epsilon(k, x)x\delta_k(y, z), w]_\epsilon$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, $y \in \mathcal{A}_1$ ter $w \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Če pomnožimo pravkar zapisano enakost z desne strani z $\mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_-, y)$ in pri tem upoštevamo identiteto (3.101), je

$$[\delta_k(x, y)z, w]_\epsilon \mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_-, y) = 0.$$

Če ponovno upoštevamo relacijo (3.101), dobimo

$$[\delta_k(x, y)z, w]_\epsilon \mathcal{A}_+\delta_k(\mathcal{A}_-, y) = 0.$$

Potem je $[\delta_k(x, y)z, w]_\epsilon \mathcal{A}\delta_k(\mathcal{A}_-, y) = 0$ za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, $y \in \mathcal{A}_1$ in $w \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. S tem smo pokazali, da je

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, y)\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+]_\epsilon \mathcal{A}\delta_k(\mathcal{A}_-, y) = 0$$

za vsak $y \in \mathcal{A}_1$. Pri nadaljnjem sklepanju upoštevajmo, da je \mathcal{A} gradirana praalgebra ter dejstvo, da grupa ne more biti unija svojih pravih podgrup. Torej je $\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_1) = 0$ ali $[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+]_\epsilon = 0$. V obeh primerih velja slednje. Posebej velja

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_-, \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_+]_\epsilon = 0,$$

saj je $\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_+ \subseteq \mathcal{A}_+$. S pomočjo enakosti (3.101) sledi, da je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_+\delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_- = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{A}_1$. Potem pa po lemi 1.31 (točka (ii)) velja

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_+\delta_k(\mathcal{A}_-, x) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathcal{A}_- = 0.$$

V obeh primerih je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_1) = 0.$$

Namreč, v primeru, ko velja $\delta_k(\mathcal{A}_-, x)\mathcal{A}_+\delta_k(\mathcal{A}_-, x) = 0$, želeni rezultat sledi po lemi 1.31 (točka (i)). Z uporabo leme 3.46 lahko razmislimo, da je

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+), \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0. \quad (3.102)$$

Pravkar zapisana relacija nas skupaj z identitetama (3.82) in (3.99) vodi do enakosti $[\delta_k(x, y)z, \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, $y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. S pomočjo že znanih relacij (3.1) in (3.102) izpeljemo enakost $\delta_k(x, y)[z, \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0$. Iz tega sledi, da je

$$\delta_k(x, y)w[z, v]_\epsilon = \delta_k(x, y)[wz, v]_\epsilon - \epsilon(z, v)\delta_k(x, y)[w, v]_\epsilon z = 0$$

za vse $v \in \mathcal{A}_1$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$ in $w, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Torej je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+)\mathcal{A}_+[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_1]_\epsilon = 0.$$

Glede na lemo 1.31 (točka (vi)) in predpostavko, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, dobimo

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+)\mathcal{A}_-\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0. \quad (3.103)$$

V nadaljevanju dokaza bomo v večji meri ponovili postopek, ki smo ga že opisali. Torej, glede na enakosti (3.82) in (3.100) vidimo, da je

$$[\delta_k(x, y)z, w]_\epsilon = [\epsilon(k, x)x\delta_k(y, z), w]_\epsilon$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, $w, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. V naslednjem koraku pomnožimo to relacijo z $\mathcal{A}_- \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+)$ in pri tem upoštevajmo enakost (3.103). Dobimo

$$[\delta_k(x, y)z, w]_{\epsilon} \mathcal{A}_- \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0.$$

Če ponovno upoštevamo enakost (3.103), vidimo, da je tudi

$$[\delta_k(x, y)z, w]_{\epsilon} \mathcal{A}_+ \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0.$$

Iz tega sledi, da je

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+]_{\epsilon} \mathcal{A} \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0.$$

Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0 \quad \text{ali} \quad [\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+]_{\epsilon} = 0.$$

Očitno v vsakem primeru drži slednje. Posebej velja

$$[\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_-, \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_+]_{\epsilon} = 0.$$

Potem s pomočjo enakosti (3.103) izpeljemo identiteto

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_+ \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_- = 0.$$

Po lemi 1.31 (točka (ii)) sledi, da je

$$\mathcal{A}_- = 0 \quad \text{ali} \quad \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_+ \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0.$$

V obeh primerih je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0. \tag{3.104}$$

Namreč, če velja $\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_+ \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+) = 0$, sledi zeleno po lemi 1.31 (točka (i)). S pomočjo že znanih relacij (3.82), (3.99), (3.100) in (3.104) izpeljemo enakost $[\delta_k(x, y)z, \mathcal{A}_+]_{\epsilon} = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, $z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$. Z uporabo enakosti (3.1) in že znane standardne metode vidimo, da je

$$\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-) \mathcal{A}_+ [\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_{\epsilon} = 0. \tag{3.105}$$

Na podoben način lahko pokažemo, da je $[x \delta_k(y, z), \mathcal{A}_+]_{\epsilon} = 0$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, iz česar sledi, da je

$$[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_+]_{\epsilon} \mathcal{A}_+ \delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-) = 0. \tag{3.106}$$

Potem glede na relaciji (3.105) in (3.106) izpeljemo $\delta_k(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_-) = 0$, pri čemer upoštevamo lemo 1.31 (točka (iv)). S tem je dokaz zaključen. \square

Naslednji izrek je posplošitev posledice 3.40.

Izrek 3.48. *Naj bo D jordansko ϵ -odvajanje na taki asociativni gradirani praalgebri \mathcal{A} , da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$. Potem je D ϵ -odvajanje.*

Dokaz. Naš cilj je pokazati, da je za vsak $k \in G$ jordansko ϵ -odvajanje D_k stopnje k ϵ -odvajanje. Torej, naj bo $k \in G$ in naj bo D_k jordansko ϵ -odvajanje stopnje k . S pomočjo enakosti (3.3) izpeljemo

$$D_k(axa) = D_k(a)xa + \epsilon(k, a)aD_k(x)a + \epsilon(k, ax)axD_k(a)$$

za vse $a \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Z linearizacijo pravkar zapisane identitete dobimo

$$\begin{aligned} D_k(axb) + D_k(bxa) &= D_k(a)xb + D_k(b)xa + \epsilon(k, a)aD_k(x)b \\ &\quad + \epsilon(k, a)bD_k(x)a + \epsilon(k, ax)axD_k(b) \\ &\quad + \epsilon(k, ax)bxD_k(a) \end{aligned}$$

za vse $a, b \in \mathcal{A}_g$, $g \in G_+$ in $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Naj bodo $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Obravnavajmo izraz $D_k(abxba + baxab)$. Potem je

$$\begin{aligned} D_k(a(bxb)a + b(axa)b) &= D_k(a)bxba + \epsilon(k, a)aD_k(bxb)a \\ &\quad + \epsilon(k, ab^2x)abxbD_k(a) + D_k(b)axab \\ &\quad + \epsilon(k, b)bD_k(axa)b + \epsilon(k, a^2bx)ba xaD_k(b) \\ &= D_k(a)bxba + \epsilon(k, a)aD_k(b)xba \\ &\quad + \epsilon(k, ab)abD_k(x)ba + \epsilon(k, abx)abxD_k(b)a \\ &\quad + \epsilon(k, ab^2x)abxbD_k(a) + D_k(b)axab \\ &\quad + \epsilon(k, b)bD_k(a)xab + \epsilon(k, ab)baD_k(x)ab \\ &\quad + \epsilon(k, abx)ba xD_k(a)b \\ &\quad + \epsilon(k, a^2bx)ba xaD_k(b). \end{aligned}$$

Po drugi strani pa opazimo, da je

$$\begin{aligned} D_k((ab)x(ba) + (ba)x(ab)) &= D_k(ab)xba + \epsilon(k, ab)abD_k(x)ba \\ &\quad + \epsilon(k, axb)abxD_k(ba) + D_k(ba)xab \\ &\quad + \epsilon(k, ab)baD_k(x)ab \\ &\quad + \epsilon(k, abx)ba xD_k(ab). \end{aligned}$$

Primerjajmo pravkar pokazani enakosti in pri tem upoštevajmo relacijo (3.81). Potem ni težko preveriti, da je

$$\begin{aligned}
 0 &= (D_k(ab) - D_k(a)b - \epsilon(k, a)aD_k(b))xba & (3.107) \\
 &+ (D_k(ba) - D_k(b)a - \epsilon(k, b)bD_k(a))xab \\
 &+ \epsilon(k, abx)ba x(D_k(ab) - D_k(a)b - \epsilon(k, a)aD_k(b)) \\
 &+ \epsilon(k, axb)abx(D_k(ba) - D_k(b)a - \epsilon(k, b)bD_k(a)) \\
 &= \delta_k(a, b)xba + \delta_k(b, a)xab + \epsilon(k, abx)ba x\delta_k(a, b) \\
 &+ \epsilon(k, abx)abx\delta_k(b, a) \\
 &= \delta_k(a, b)x[b, a]_\epsilon + \epsilon(k, abx)[b, a]_\epsilon x\delta_k(a, b)
 \end{aligned}$$

za vse $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ in $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Zaradi boljše preglednosti pišimo $\delta_k = \delta_k(a, b)$ in $c = [b, a]_\epsilon$. S pomočjo enakosti (3.107) sledi, da je

$$\begin{aligned}
 \delta_k x c y c &= -\epsilon(k, a^2 b^2 x y) c x c y \delta_k \\
 &= \epsilon(k, abx) c x \delta_k y c \\
 &= -\delta_k x c y c.
 \end{aligned}$$

Torej je $\delta_k x c y c = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Torej, $\delta_k \mathcal{A} c \mathcal{A} c = 0$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je $\delta_k = 0$ ali $c = 0$. S tem smo pokazali, da za vsak par $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ velja $\delta_k(a, b) = 0$ ali $[a, b]_\epsilon = 0$. Ni težko razmisliti, da vsak par $g, h \in G_+$ velja $\delta_k(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_h) = 0$ ali $[\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_h]_\epsilon = 0$ (do tega sklepa pridemo na podoben način kot v dokazu izreka 3.19). V nadaljevanju pokažimo, da je $\delta_k(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_g) = 0$ za vsak $g \in G_+$. Predpostavimo, da je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_g]_\epsilon = 0$ za neki $g \in G_+$. Potem glede na enakost (3.83) velja

$$[D_k([x, y]_\epsilon) - [D_k(x), y]_\epsilon - [x, D_k(y)]_\epsilon, z]_\epsilon = 0$$

za vse $x \in \mathcal{A}_1$, $y \in \mathcal{A}_g$ in $z \in \mathcal{A}$. Ker je po predpostavki prav tako $D_k(x \circ_\epsilon y) - D_k(x) \circ_\epsilon y - x \circ_\epsilon D_k(y) = 0$, sledi, da je

$$[\delta_k(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_g), \mathcal{A}]_\epsilon = 0. \quad (3.108)$$

Z uporabo identitete (3.82) izpeljemo enakost $[x\delta_k(y, z), z]_\epsilon = 0$ za vse $x, z \in \mathcal{A}_1$ in $y \in \mathcal{A}_g$. S pomočjo enakosti (3.1) in (3.108) sledi, da je $[x, z]\delta_k(y, z) = 0$. Potem pa je $[x, z]\mathcal{A}\delta_k(y, z) = 0$ za vse $x, z \in \mathcal{A}_1$ in $y \in \mathcal{A}_g$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je za vsak $z \in \mathcal{A}_1$ bodisi $[\mathcal{A}_1, z] = 0$ ali $\delta_k(\mathcal{A}_g, z) = 0$. Ker grupa \mathcal{A}_1

ne more biti unija svojih pravih podgrup in je $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \neq 0$, velja $\delta_k(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_1) = 0$. S tem smo pokazali, da je $\delta_k(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_1) = 0$. S pomočjo leme 3.47 sledi želeni rezultat. \square

Za konec zapišimo še primer jordankega ϵ -odvajanja, ki ni ϵ -odvajanje.

Primer 3.49. Naj bo \mathcal{A} algebra, opisana v primeru 3.20, $k \in G_+$ in $a \in \mathcal{A}_k$. Definirajmo preslikavo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $D_k(x + y) = ay$ za vse $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_+)$ ter $y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$. Potem je D_k jordankega ϵ -odvajanja stopnje k . Če je $a \neq 0$ in $\mathcal{A}_- \neq 0$, potem D_k ni ϵ -odvajanje. Če je namreč $D_k(xy) = D_k(x)y + \epsilon(k, x)xD_k(y)$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_-)$, potem je $a\mathcal{A}_-\mathcal{A}_- = 0$, kar pa je v protislovju s predpostavko.

4 Lokalna superodvajanja in lokalna ϵ -odvajanja

V tem poglavju bomo predstavili lokalna superodvajanja in lokalna ϵ -odvajanja ter nekaj novejših rezultatov na tem področju. Kot že zapisano, superalgebre so poseben primer gradiranih algeber. Ker je namen monografije predstaviti obravnavo določenih vprašanj tako na področju superalgeber kot tudi gradiranih algeber, bo poglavje razdeljeno na dva dela. V prvem delu se bomo osredotočili na lokalna superodvajanja, predstavili bomo osnovne primere in glavne rezultate. V drugem delu pa bomo pozornost posvetili posplošitvam obravnavanih rezultatov na gradirane algebre.

4.1 Lokalna superodvajanja

Brešar je v svojem delu [8] raziskoval odvajanja na določenih koloobarjih, ki vsebujejo necentralne idempotente. Kot posledico je predstavil nekaj novih rezultatov o lokalnih odvajanjih. Pokazal je, da je vsako lokalno odvajanje na prakolobarju, ki vsebuje netrivialni idempotent, odvajanje. V duhu te raziskave se je porodilo vprašanje glede posplošitve rezultatov, najprej na superalgebre, nato še na gradirane algebre.

Zapišimo najprej definicijo lokalnega odvajanja.

Definicija 4.1. *Naj bo \mathcal{A} algebra in naj bo \mathcal{M} \mathcal{A} -bimodul. Lokalno odvajanje je taka Φ -linearna preslikava $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, da za vsak $x \in \mathcal{A}$ obstaja tako odvajanje $D_x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, da je $D(x) = D_x(x)$.*

Avtorji Kadison [38], Larson in Sourour [41] obravnavajo vprašanje, pod katerimi pogoji je lokalno odvajanje avtomatično odvajanje. Na to temo je bilo nato napisanih več člankov, kot na primer [6, 11, 12, 13, 27, 28, 36, 44, 47, 49, 50, 51, 53, 54, 59]. Namen tega poglavja je obravnavati tovrstno problematiko tudi na področju superalgeber.

Naj bo \mathcal{A} algebra. Potem je \mathcal{A} -bimodul \mathcal{M} \mathcal{A} -superbimodul, če velja $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$. V nadaljevanju bomo z $D_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ označili suprodvajanje stopnje 0 in z $D_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ superodvajanje stopnje 1.

Definicija 4.2. *Naj bo \mathcal{A} asociativna superalgebra in naj bo \mathcal{M} \mathcal{A} -superbimodul. Nadalje, naj bo $i = 0$ ali $i = 1$. Potem je Φ -linearna preslikava $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ lokalno superodvajanje stopnje i , če za vsak $x \in \mathcal{A}$ obstaja tako superodvajanje $D_{i_x} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ stopnje i , da je $D_i(x) = D_{i_x}(x)$. Lokalno superodvajanje je vsota lokalnega superodvajanja stopnje 0 in lokalnega superodvajanja stopnje 1.*

V duhu prej zapisanega se naravno porodi vprašanje, kdaj je lokalno superodvajanje lokalno odvajanje. Eden od ciljev tega poglavja je odgovoriti na to vprašanje.

Najprej zapišimo nekaj oznak. Vseskozi bo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ asociativna superalgebra in $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$ \mathcal{A} -superbimodul. Z \mathcal{E} bomo označili množico $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1$, kjer je

$$\mathcal{E}_0 = \{e \in \mathcal{A}_0 \mid e^2 = e\} \quad \text{in}$$

$$\mathcal{E}_1 = \{e \in \mathcal{A}_1 \mid \text{obstaja tak } e' \in \mathcal{E}_0, \text{ da je } (e' + e)^2 = e' + e\}.$$

Množica \mathcal{E}_0 je pravzaprav množica vseh idempotentov v algebri \mathcal{A}_0 in hitro lahko preverimo, da iz $(e' + e)^2 = e' + e$, $e' \in \mathcal{E}_0$, $e \in \mathcal{E}_1$ sledi $e^2 = 0$ in $e'e + ee' = e$. Nadalje, z $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1$ bomo označili pod-superalgebro superalgebre \mathcal{A} generirano z \mathcal{E} . S simbolom $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \oplus \mathcal{I}_1$ pa bomo označili gradiran ideal generiran z $[\mathcal{E}_0, \mathcal{A}]$. Zapišimo še, da je centralni idempotent tak idempotent e superalgebre \mathcal{A} , da je $[e, x] = 0$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.

Lema 4.3. *Velja $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$.*

Dokaz. Naj bo $e \in \mathcal{E}_0$ in $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Opazimo, da sta elementa $e + ex - exe$ in $e + xe - exe$ tudi vsebovana v \mathcal{E} . Namreč, če je $x \in \mathcal{A}_0$, potem velja $e + ex - exe, e + xe - exe \in \mathcal{E}_0$. V primeru, ko je $x \in \mathcal{A}_1$, je $ex - exe, xe - exe \in \mathcal{E}_1$ ($e' = e$). Ker je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$, je $(e + ex - exe) - (e + xe - exe) = [e, x] \in \mathcal{R}$. S pomočjo dokaza [8, lema 2.1] sledi rezultat. \square

Zapišimo nekaj primerov, ko je $\mathcal{A} = \mathcal{R}$.

- (a) \mathcal{A} je enostavna superalgebra, ki vsebuje netrivialni idempotent v \mathcal{A}_0 .

Netrivialni idempotent je idempotent, ki je različen od 0 in 1. Enostavna superalgebra (kot tudi pra-superalgebra) ne vsebuje netrivialnih centralnih idempotentov v sodem delu. Torej, če je \mathcal{A} superalgebra tipa (a), je $\mathcal{I} \neq 0$, kar pomeni, da je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ glede na lemo 4.3.

- (b) \mathcal{A} je enotska superalgebra, ki vsebuje tak idempotent $e_0 \in \mathcal{A}_0$, da sta gradirana ideala generirana z e_0 oziroma $1 - e_0$ enaka \mathcal{A} .

Predpostavimo, da \mathcal{A} zadošča zgornjemu pogoju. Potem je $\sum_j x_j(1 - e_0)y_j = e_0$ za neke $x_j, y_j \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Iz tega sledi, da je $e_0 = \sum_j [e_0, x_j](1 - e_0)y_j \in \mathcal{I}$. Analogno vidimo, da je $\sum_j x'_j e_0 y'_j = 1 - e_0$ za neke $x'_j, y'_j \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in zato $1 - e_0 = \sum_j [x'_j, e_0]e_0 y'_j \in \mathcal{I}$. Posledično je $1 \in \mathcal{I}$, iz česar sledi $\mathcal{I} = \mathcal{R} = \mathcal{A}$.

- (c) $\mathcal{A} = M_n(\mathcal{B})$, superalgebra $n \times n$ matrik nad enotsko algebro \mathcal{B} , kjer je $n \geq 2$.

Naj bo \mathcal{A} tipa (c). Ni težko preveriti, da \mathcal{A} zadošča (b). Namreč, za e_0 lahko izberemo na primer matrično enoto E_{11} .

Naj bo v nadaljevanju $i = 0$ ali $i = 1$ in $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ naj označuje Φ -linearno preslikavo. Obravnavali bomo naslednja dva pogoja:

$$(D_i1) \quad xy = yz = 0 \Rightarrow (x_0 + (-1)^i x_1)D_i(y)z = 0$$

$$(x = x_0 + x_1, y, z \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1),$$

$$(D_i2) \quad xy = 0 \Rightarrow D_i(x)y + (x_0 + (-1)^i x_1)D_i(y) = 0$$

$$(x = x_0 + x_1, y \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1).$$

Ni težko preveriti, da so preslikave, ki zadoščajo pogoju (D_02) oziroma (D_12) dejansko posebni primeri preslikav, ki zadoščajo pogoju (D_01) oziroma (D_11) .

Predpostavimo sedaj, da je $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ superodvajanje stopnje i . Izberimo taka $x = x_0 + x_1, y \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, da je $xy = 0$.

Potem je

$$0 = D_i(xy) = D_i(x)y + (x_0 + (-1)^i x_1)D_i(y).$$

Nadalje, iz enakosti $xy = yz = 0$, $z \in \mathcal{A}$, sledi, da je

$$\begin{aligned} 0 &= D_i(xy)z = D_i(x)yz + (x_0 + (-1)^i x_1)D_i(y)z \\ &= (x_0 + (-1)^i x_1)D_i(y)z. \end{aligned}$$

To pomeni, vsako superodvajanje stopnje 0 zadošča pogoju (D_01) in (D_02) . Podobno vsako superodvajanje stopnje 1 zadošča pogoju (D_11) in (D_12) . Ali velja tudi obratna zveza?

Naj bo sedaj $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ lokalno superodvajanje stopnje i , $i = 0, 1$. Potem za vsak $x = x_0 + x_1, y, z \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ velja

$$\begin{aligned} (x_0 + (-1)^i x_1)D_i(y)z &= (x_0 + (-1)^i x_1)d_{i_y}(y)z \\ &= d_{i_y}(xy)z - d_{i_y}(x)yz. \end{aligned}$$

Če je $xy = yz = 0$, potem iz zgornje enakosti sledi, da je $(x_0 + (-1)^i x_1)D_i(y)z = 0$. Pokazali smo torej, da tudi vsako lokalno superodvajanje stopnje i zadošča pogoju (D_i1) .

Pogoja (D_01) in (D_11)

Naj bo \mathcal{A} enotska superalgebra in naj bo \mathcal{M} enotski \mathcal{A} -superbimodul. Obravnavali bomo tako Φ -linearno preslikavo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, ki zadošča pogoju (D_i1) in je $D_i(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{M}_i$, $D_i(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{M}_{1+i}$ (indeks modul 2) ter $D_i(1) = 0$.

Izrek 4.4. *Naj bo \mathcal{A} enotska superalgebra, \mathcal{M} enotski \mathcal{A} -superbimodul in naj bo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja (D_i1) , $D_i(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{M}_i$, $D_i(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{M}_{1+i}$ (indeks modul 2) in $D_i(1) = 0$. Potem je zožitev preslikave D_i na \mathcal{R} superodvajanje stopnje i . Velja še več,*

$$D_i(rxs) + (-1)^{i|r|} r D_i(x)s = D_i(rx)s + (-1)^{i|r|} r D_i(xs) \quad (4.1)$$

za vse $r, s \in \mathcal{H}(\mathcal{R}), x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in

$$\mathcal{I}(D_i(xy) - D_i(x)y - (-1)^{i|x|} x D_i(y))\mathcal{I} = 0 \quad (4.2)$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Naj bosta e in f idempotenta v superalgebri \mathcal{A} in naj bo $x \in \mathcal{A}$. Ni težko preveriti, da velja

$$\begin{aligned} (1 - e) \cdot exf &= exf \cdot (1 - f) = 0, \\ e \cdot (1 - e)xf &= (1 - e)xf \cdot (1 - f) = 0, \\ (1 - e) \cdot ex(1 - f) &= ex(1 - f) \cdot f = 0, \\ e \cdot (1 - e)x(1 - f) &= (1 - e)x(1 - f) \cdot f = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

V enakost (4.3) pišimo $e = e_0, f = f_0 \in \mathcal{E}_0$. S pomočjo predpostavke $(D_i 1)$ pridemo do

$$\begin{aligned} (1 - e_0)D_i(e_0xf_0)(1 - f_0) &= 0, \\ e_0D_i((1 - e_0)xf_0)(1 - f_0) &= 0, \\ (1 - e_0)D_i(e_0x(1 - f_0))f_0 &= 0, \\ e_0D_i((1 - e_0)x(1 - f_0))f_0 &= 0. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je

$$D_i(e_0xf_0) + e_0D_i(x)f_0 = D_i(e_0x)f_0 + e_0D_i(xf_0) \quad (4.4)$$

za vse $e_0, f_0 \in \mathcal{E}_0$ in $x \in \mathcal{A}$.

Naj bosta sedaj $e = e_0 \in \mathcal{E}_0$ in $f = f_0 + f_1 \in \mathcal{A}$ taka idempotenta, da je $f_0 \in \mathcal{E}_0$ in $f_1 \in \mathcal{E}_1$. Upoštevajmo (4.3) in $(D_i 1)$. Potem je

$$\begin{aligned} (1 - e_0)D_i(e_0xf)(1 - f) &= 0, \\ e_0D_i((1 - e_0)xf)(1 - f) &= 0, \\ (1 - e_0)D_i(e_0x(1 - f))f &= 0, \\ e_0D_i((1 - e_0)x(1 - f))f &= 0. \end{aligned}$$

Torej je $D_i(e_0xf) + e_0D_i(x)f = D_i(e_0x)f + e_0D_i(xf)$. Iz enakosti (4.4) dobimo

$$D_i(e_0xf_1) + e_0D_i(x)f_1 = D_i(e_0x)f_1 + e_0D_i(xf_1) \quad (4.5)$$

za vse $e_0 \in \mathcal{E}_0, f_1 \in \mathcal{E}_1$ in $x \in \mathcal{A}$.

Naj bo $f = f_0 \in \mathcal{E}_0$ in naj bo $e = e_0 + e_1 \in \mathcal{A}$ idempotent, pri čemer je $e_0 \in \mathcal{E}_0$ in $e_1 \in \mathcal{E}_1$. Ponovno upoštevajmo (4.3) in $(D_i 1)$.

Torej velja

$$\begin{aligned}(1 - e_0 - (-1)^i e_1) D_i(e x f_0)(1 - f_0) &= 0, \\ (e_0 + (-1)^i e_1) D_i((1 - e) x f_0)(1 - f_0) &= 0, \\ (1 - e_0 - (-1)^i e_1) D_i(e x (1 - f_0)) f_0 &= 0, \\ (e_0 + (-1)^i e_1) D_i((1 - e) x (1 - f_0)) f_0 &= 0.\end{aligned}$$

Glede na (4.4) dobimo enakost

$$D_i(e_1 x f_0) + (-1)^i e_1 D_i(x) f_0 = D_i(e_1 x) f_0 + (-1)^i e_1 D_i(x f_0) \quad (4.6)$$

za vse $e_1 \in \mathcal{E}_1$, $f_0 \in \mathcal{E}_0$ in $x \in \mathcal{A}$.

Nazadnje naj bosta $e = e_0 + e_1 \in \mathcal{A}$ in $f = f_0 + f_1 \in \mathcal{A}$ taka idempotenta, da je $e_0, f_0 \in \mathcal{E}_0$ ter $e_1, f_1 \in \mathcal{E}_1$. S pomočjo že predstavljenega postopka pridemo do identitete

$$D_i(e_1 x f_1) + (-1)^i e_1 D_i(x) f_1 = D_i(e_1 x) f_1 + (-1)^i e_1 D_i(x f_1) \quad (4.7)$$

za vsak $e_1, f_1 \in \mathcal{E}_1$ in $x \in \mathcal{A}$. Glede na dobljene relacije (4.4), (4.5), (4.6) in (4.7) velja

$$D_i(e x f) + (-1)^{i|e|} e D_i(x) f = D_i(e x) f + (-1)^{i|e|} e D_i(x f) \quad (4.8)$$

za vse $e, f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ in $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Naj bo $x = 1$. Upoštevajmo, da je $D_i(1) = 0$, iz česar sledi, da je

$$D_i(e f) = D_i(e) f + (-1)^{i|e|} e D_i(f) \quad (4.9)$$

za vsaka $e, f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$.

V naslednjem koraku bomo pokazali, da je zožitev preslikave D_i na \mathcal{R} superodvajanje stopnje i . Pokažimo najprej, da je

$$\begin{aligned}D_i(e_1 e_2 \dots e_n) & \quad (4.10) \\ &= D_i(e_1) e_2 \dots e_{n-1} e_n + (-1)^{i|e_1|} e_1 D_i(e_2) e_3 \dots e_{n-1} e_n + \\ &+ \dots + (-1)^{i|e_1 e_2 \dots e_{n-1}|} e_1 e_2 \dots e_{n-1} D_i(e_n)\end{aligned}$$

za vsak $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, kjer so $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Uporabili bomo indukcijo po n . Glede na (4.9) je zeleno dokazano za $n = 2$. Naj

bo sedaj $2 < n$ in predpostavimo, da želeno velja za vsako naravno število manjše od n . Z upoštevanjem (4.8) pridemo do

$$\begin{aligned} D_i(e_1 e_2 \dots e_n) &= D_i(e_1 e_2 \dots e_{n-1}) e_n + \\ &+ (-1)^{i|e_1|} e_1 D_i(e_2 \dots e_n) - (-1)^{i|e_1|} e_1 D_i(e_2 \dots e_{n-1}) e_n \end{aligned}$$

za vse $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Iz tega sledi (4.10). S tem smo pokazali, da je zožitev preslikave D_i na \mathcal{R} superodvajanje stopnje i .

Za poljuben $a \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ bomo označili množici

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a &= \{r \in \mathcal{H}(\mathcal{R}) \mid D_i(rxa) + (-1)^{i|r|} r D_i(x)a \\ &= D_i(rx)a + (-1)^{i|r|} r D_i(xa) \text{ za vsak } x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}, \\ \mathcal{T}_a &= \{s \in \mathcal{H}(\mathcal{R}) \mid D_i(ags) + (-1)^{i|a|} a D_i(x)s \\ &= D_i(ax)s + (-1)^{i|a|} a D_i(xs) \text{ za vsak } x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}. \end{aligned}$$

Naj bodo $r, r' \in \mathcal{S}_a$. Potem je

$$\begin{aligned} D_i(rr'xa) &= D_i(rr'x)a + (-1)^{i|r|} r D_i(r'xa) - (-1)^{i|r|} r D_i(r'x)a \\ &= D_i(rr'x)a + (-1)^{i|r|} r (D_i(r'x)a + (-1)^{i|r'|} r' D_i(xa) \\ &\quad - (-1)^{i|r'|} r' D_i(x)a) - (-1)^{i|r|} r D_i(r'x)a \\ &= D_i(rr'x)a + (-1)^{i|rr'|} rr' D_i(xa) - (-1)^{i|rr'|} rr' D_i(x)a \end{aligned}$$

za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. S tem smo pokazali, da je $rr' \in \mathcal{S}_a$ za vsak par $r, r' \in \mathcal{S}_a$. Podobno lahko pokažemo, da je $ss' \in \mathcal{T}_a$ za vsak par $s, s' \in \mathcal{T}_a$. Vidimo, da je $\mathcal{H}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}_f$ za vse $f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Torej je $\mathcal{H}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{S}_f$ za vse $f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Iz tega sledi, da je $f \in \mathcal{T}_r$ za vsak $f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ in vsak $r \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. Potem pa je $\mathcal{H}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{T}_r$ za vsak $r \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. S tem smo pokazali (4.1).

Naj bodo sedaj $u \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $s \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. Potem je $ux \in \mathcal{H}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{R})$ glede na lemo 4.3. Ker je D_i superodvajanje stopnje i na \mathcal{R} , je

$$D_i(uxs) = D_i(ux)s + (-1)^{i|ux|} ux D_i(s).$$

Ker pa je $u, s \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, sledi iz (4.18), da je

$$D_i(uxs) = D_i(ux)s + (-1)^{i|u|} u D_i(xs) - (-1)^{i|u|} u D_i(x)s.$$

Če primerjamo zadnji dve enakosti, vidimo, da je

$$u(D_i(xs) - D_i(x)s - (-1)^{i|x|} x D_i(s)) = 0 \quad (4.11)$$

za vse $u \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $s \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. Naj bo sedaj $y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $v \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$. Ker je $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, sledi

$$u(D_i((xy)v) - D_i(xy)v - (-1)^{|xy|}xyD_i(v)) = 0.$$

Po drugi strani pa je $yv, v \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$ in $ux \in \mathcal{I}$. Vidimo, da je

$$\begin{aligned} 0 &= u(D_i(x(yv)) - D_i(x)yv - (-1)^{|x|}xD_i(yv)) \\ &= u(D_i(x(yv)) - D_i(x)yv - (-1)^{|x|}x(D_i(y)v + (-1)^{|y|}yD_i(v))). \end{aligned}$$

Če primerjamo zadnji dve enakosti, pridemo do želenega zaključka (4.2). S tem je dokaz zaključen. \square

Glede na pravkar zapisan rezultat takoj sledita dve posledici. Prva obravnava primer, ko je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, druga pa primer, ko je \mathcal{A} prasueralgebra, ki vsebuje netrivialni idempotent v \mathcal{A}_0 .

Posledica 4.5. *Če je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, potem $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ superodvajanje stopnje i .*

Posledica 4.6. *Naj bo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja $(D_i 1)$, $D_i(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_i$, $D_i(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_{1+i}$ (indeks modul 2) in $D_i(1) = 0$. Če je \mathcal{A} pra-superalgebra, ki vsebuje netrivialni idempotent v \mathcal{A}_0 , potem je D_i superodvajanje stopnje i .*

Omenimo še, da izrek 4.4 velja tudi za lokalna superodvajanja $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ stopnje i . Naj bo sedaj \mathcal{A} neenotska superalgebra in naj bo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ lokalno superodvajanje stopnje i . Potem lahko obravnavamo superalgebro \mathcal{A}' , ki ji dodamo enoto v \mathcal{A} . Definirajmo $1m = m = m1$ za vsak $m \in \mathcal{M}$. Potem je \mathcal{M} enotski \mathcal{A}' -superbimodul. Razširimo D_i na \mathcal{A}' z definiranjem $D_i(1) = 0$. Opazimo, da je D_i lokalno superodvajanje stopnje i na \mathcal{A}' . Torej izrek 4.4 velja tudi v primeru, ko \mathcal{A} in \mathcal{M} ne vsebujeta enote. Posebej velja, da vsaka superalgebra \mathcal{A} z necentralnim idempotentom v \mathcal{A}_0 vsebuje tak neničelni gradirani ideal \mathcal{I} , da je vsako lokalno superodvajanje $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ stopnje i superodvajanje stopnje i na \mathcal{I} . S tem smo dobili odgovor na zastavljeno vprašanje: vsako lokalno superodvajanje iz \mathcal{A} v \mathcal{M} je superodvajanje na \mathcal{I} .

Naslednji dve posledici obravnavata vprašanje, kdaj je lokalno superodvajanje superodvajanje.

Posledica 4.7. *Če je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, potem je vsako lokalno superodvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ superodvajanje.*

Dokaz. Naj bo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, $i = 0, 1$, lokalno superodvajanje stopnje i . Potem D_i zadošča pogoju (D_i1) . Glede na izrek 4.4 sledi, da je D_i superodvajanje stopnje i na \mathcal{A} . Torej je vsako lokalno superodvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ superodvajanje. \square

Posledica 4.8. *Naj bo \mathcal{A} pra-superalgebra, ki vsebuje netrivialni idempotent v \mathcal{A}_0 . Potem je vsako lokalno superodvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ superodvajanje.*

Dokaz. Glede na predpostavko, \mathcal{A} vsebuje neničelni gradirani ideal \mathcal{I} . Naj bo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ lokalno superodvajanje stopnje i . S pomočjo izreka 4.4 sledi, da velja (4.2). Ker je \mathcal{A} pra-superalgebra, je D_i superodvajanje stopnje i na \mathcal{A} . Iz tega sledi, da je vsako lokalno superodvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ superodvajanje. \square

Pogoja (D_02) in (D_12)

Hitro lahko preverimo, da iz pogoja (D_02) sledi pogoj (D_01) ter iz pogoja (D_12) sledi pogoj (D_11) . Tako rezultati prejšnjega dela podajo že nekaj zaključkov za preslikave, ki zadoščajo pogojema (D_02) ali (D_12) . V nadaljevanju bomo predpostavili, da superalgebri in superbimoduli niso enotski. Obravnavali bomo tako Φ -linearno preslikavo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, ki zadošča pogoju (D_i2) in je $D_i(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{M}_i$, $D_i(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{M}_{1+i}$ (indeks modul 2).

Izrek 4.9. *Naj bo \mathcal{A} superalgebra, \mathcal{M} \mathcal{A} -superbimodul in naj bo $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ taka Φ -linearna preslikava, da je $D_i(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{M}_i$, $D_i(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{M}_{1+i}$ (indeks modul 2) in (D_i2) . Potem je*

$$D_i(xr)z + (-1)^{i|xr|}xrD_i(z) = D_i(x)rz + (-1)^{i|x|}xD_i(rz) \quad (4.12)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, $r \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ in

$$\begin{aligned} &(-1)^{i|wtz|}wtz(D_i(xy) - D_i(x)y - (-1)^{i|x|}xD_i(y)) \\ &= (D_i(wt) - D_i(w)t - (-1)^{i|w|}wD_i(t))zxy \end{aligned} \quad (4.13)$$

za vse $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$, $x, y, z, w \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Naj bo e idempotent v \mathcal{A} in naj bosta $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Potem je

$$\begin{aligned} (x - xe) \cdot ez &= 0, \\ xe \cdot (z - ez) &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Najprej predpostavimo, da je $e = e_0 \in \mathcal{E}_0$. Po (D_i2) je

$$\begin{aligned} D_i(x - xe_0)e_0z + (-1)^{|xe_0|}(x - xe_0)D_i(e_0z) &= 0, \\ D_i(xe_0)(z - e_0z) + (-1)^{|xe_0|}xe_0D_i(z - e_0z) &= 0. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je

$$D_i(xe_0)z + (-1)^{|xe_0|}xe_0D_i(z) = D_i(x)e_0z + (-1)^{|x|}xD_i(e_0z) \quad (4.15)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $e_0 \in \mathcal{E}_0$. Naj bo sedaj $e = e_0 + e_1 \in \mathcal{A}$ idempotent, kjer je $e_0 \in \mathcal{E}_0$ in $e_1 \in \mathcal{E}_1$. Po (4.14), (D_i2) in (4.15) je

$$D_i(xe_1)z + (-1)^{|xe_1|}xe_1D_i(z) = D_i(x)e_1z + (-1)^{|x|}xD_i(e_1z)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $e_1 \in \mathcal{E}_1$. S tem smo pokazali

$$D_i(xe)z + (-1)^{|xe|}xeD_i(z) = D_i(x)ez + (-1)^{|x|}xD_i(ez) \quad (4.16)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $e \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Označimo

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{r \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid D_i(xr)z + (-1)^{|xr|}xrD_i(z) \\ &= D_i(x)rz + (-1)^{|x|}xD_i(rz) \text{ za vsak } x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}. \end{aligned}$$

Naj bodo $r, r' \in \mathcal{T}$ in $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Potem je

$$\begin{aligned} D_i(xrr')z &= D_i(xr)r'z + (-1)^{|xr|}xrD_i(r'z) - (-1)^{|xrr'|}xrr'D_i(z) \\ &= D_i(x)rr'z + (-1)^{|x|}xD_i(rr'z) - (-1)^{|xrr'|}xrr'D_i(z). \end{aligned}$$

Tako smo pokazali, da je $rr' \in \mathcal{T}$. Ker je $\mathcal{H}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{T}$ (glej (4.16)), je $\mathcal{H}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{T}$. Torej velja (4.12).

Naj bodo $u \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$ in $x, y, z, w, w', w'' \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Potem je

$$uzx, w''uz, w'w''u \in \mathcal{H}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{R})$$

glede na lemo 4.3. Z upoštevanjem (4.12) je

$$\begin{aligned} ww'w''D_i(uzxy) &= \\ &= (-1)^{|w''|}ww'D_i(w''uzx)y + (-1)^{|uzx|}ww'w''uzxD_i(y) \\ &- (-1)^{|w''|}ww'D_i(w'')uzxy = (-1)^{|w''|}w((-1)^{|w'|}D_i(w'w''uz)x \\ &+ (-1)^{|w''uz|}w'w''uzD_i(x) - (-1)^{|w'|}D_i(w')w''uzx)y \\ &+ (-1)^{|uzx|}ww'w''uzxD_i(y) - (-1)^{|w''|}ww'D_i(w'')uzxy \\ &= (-1)^{|w''w'|}((-1)^{|w|}D_i(ww'w''u)z + (-1)^{|w'w''u|}ww'w''uD_i(z) \\ &- (-1)^{|w|}D_i(w)w'w''uz)xy + (-1)^{|uz|}ww'w''uzD_i(x)y \\ &- (-1)^{|w''w'|}wD_i(w')w''uzxy + (-1)^{|uzx|}ww'w''uzxD_i(y) \\ &- (-1)^{|w''|}ww'D_i(w'')uzxy. \end{aligned}$$

Ker je $uz, w''u \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, velja

$$\begin{aligned}
 ww'w''D_i(uzxy) &= \\
 &= 0(-1)^{i|w''|}ww'D_i(w''uz)xy + (-1)^{i|uz|}ww'w''uzD_i(xy) \\
 &\quad - (-1)^{i|w''|}ww'D_i(w'')uzxy = (-1)^{i|w''|}w((-1)^{i|w'|}D_i(w'w''u)z \\
 &\quad + (-1)^{i|w''u|}w'w''uD_i(z) - (-1)^{i|w'|}D_i(w')w''uz)xy \\
 &\quad + (-1)^{i|uz|}ww'w''uzD_i(xy) - (-1)^{i|w''|}ww'D_i(w'')uzxy.
 \end{aligned}$$

Pišimo $t = w'w''u$. Ko primerjamo obe dobljeni identiteti, dobimo

$$\begin{aligned}
 &(-1)^{i|wtz|}wtz(D_i(xy) - D_i(x)y - (-1)^{i|x|}xD_i(y)) \\
 &= (D_i(wt) - D_i(w)t - (-1)^{i|w|}wD_i(t))zxy
 \end{aligned}$$

za vse $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$, $x, y, z, w \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. S tem je dokaz zaključen. \square

Posledica 4.10. Če je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, preslikava $D_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ zadošča (4.17). Velja še več, če \mathcal{A} in \mathcal{M} vsebujeta enoto, je $\lambda = D_i(1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ in obstaja tako superodvajanje $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ stopnje i , da je $D_i(x) = \delta_i(x) + \lambda x$ za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Dokaz. V primeru, ko je $\mathcal{A} = \mathcal{R}$, lahko (4.12) zapišemo kot

$$D_i(xy)z + (-1)^{i|xy|}xyD_i(z) = D_i(x)yz + (-1)^{i|x|}xD_i(y)z \quad (4.17)$$

za vse $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Predpostavimo sedaj, da sta \mathcal{A} in \mathcal{M} enotski. Naj bo $x = z = 1$. Po (4.17) je $\lambda = D_i(1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{H}(\mathcal{M}) \mid (-1)^{i|x|}xm = mx \text{ za vsak } x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}$. Če je $i = 0$, potem je $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ dejansko center \mathcal{M} . Naj bo $z = 1$. Potem je $\delta_i : x \mapsto D_i(x) - \lambda x$ superodvajanje stopnje i . Velja namreč

$$\begin{aligned}
 \delta_i(xy) &= D_i(xy) - \lambda xy \\
 &= D_i(x)y + (-1)^{i|x|}xD_i(y) - 2\lambda xy \\
 &= \delta_i(x)y + \lambda xy + (-1)^{i|x|}x\delta_i(y) - \lambda xy \\
 &= \delta_i(x)y + (-1)^{i|x|}x\delta_i(y)
 \end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. \square

Posledica 4.11. Naj bo \mathcal{A} pra-superalgebra, ki vsebuje netrivialni idempotent $v \in \mathcal{A}_0$ in naj bo $D_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja (D_0^2) , $D_0(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$ in $D_0(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$. Potem obstaja tak

element λ v razširjenem centroidu algebre \mathcal{A} in tako superodvajanje δ_0 stopnje 0, ki slika iz superalgebre \mathcal{A} v centralno zaprtje od \mathcal{A} , da je $D_0(x) = \delta_0(x) + \lambda x$ za vsak $x \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Glede na predpostavko, velja (4.13) in $\mathcal{A}^2\mathcal{I} \neq 0$. Namreč, če je $\mathcal{A}^2\mathcal{I} = 0$, potem mora biti $\mathcal{I} = 0$. Ker pa \mathcal{A} ne vsebuje netrivialnega centralnega idempotenta v \mathcal{A}_0 , je $\mathcal{I} \neq 0$.

Naj bosta sedaj $w \in \mathcal{A}$ in $t \in \mathcal{A}^2\mathcal{I}$ taka elementa, da velja $wt \neq 0$. Glede na (4.13) je

$$wtz(D_0(wt) - D_0(w)t - wD_0(t)) = (D_0(wt) - D_0(w)t - wD_0(t))zwt$$

za vsak $z \in \mathcal{A}$. Torej obstaja tak μ v razširjenem centroidu \mathcal{C} algebre \mathcal{A} , da je

$$\mu wt = D_0(wt) - D_0(w)t - wD_0(t).$$

Iz (4.13) potem sledi, da je

$$wtz(D_0(xy) - D_0(x)y - xD_0(y) - \mu xy) = 0$$

za vse $x, y, z \in \mathcal{A}$. Ker je \mathcal{A} praalgebra, velja

$$D_0(xy) - D_0(x)y - xD_0(y) = \mu xy$$

za vsak $x, y \in \mathcal{A}$. Potem pa je $D_0(x) = \delta_0(x) - \mu x$ za vsak $x \in \mathcal{A}$, saj je δ_0 superodvajanje stonje 0, ki slika iz superalgebre \mathcal{A} v centralno zaprtje od \mathcal{A} . Označimo še $\lambda = -\mu$ in dokaz je končan. \square

V primeru, ko je \mathcal{A} enotska superalgebra, superodvajanje δ_0 slika v \mathcal{A} in je $\lambda = D_0(1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Posledica 4.12. *Naj bo \mathcal{A} prasuperalgebra, ki vsebuje netrivialni idempotent v \mathcal{A}_0 , in naj bo $D_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja $(D_1 2)$, $D_1(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_1$, in $D_1(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_0$. Potem je D_1 superodvajanje stopnje 1.*

Dokaz. Glede na predpostavke obstajata taka elementa $w \in \mathcal{A}$ in $t \in \mathcal{A}^2\mathcal{I}$, da je $wt \neq 0$. Predpostavimo najprej, da je lihi del \mathcal{C}_1 razširjenega centroida $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1$ superalgebre \mathcal{A} enak nič. Po (4.13) je

$$wtz(D_1(xy) - D_1(x)y - (-1)^{|x|}xD_1(y)) = 0$$

za vsak $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Iz tega sledi, da je

$$D_1(xy) - D_1(x)y - (-1)^{|x|}xD_1(y) = 0$$

for all $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. S tem smo pokazali, da je D_1 superodvajanje stopnje 1 na \mathcal{A} .

Predpostavimo sedaj, da je $\mathcal{C}_1 \neq 0$. Glede na (4.13) je

$$\begin{aligned} & (-1)^{|wt|}wtz(D_1(xy) - D_1(x)y - (-1)^{|x|}xD_1(y)) \\ &= (D_1(wt) - D_1(w)t - (-1)^{|w|}wD_1(t))zxy \end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $z \in \mathcal{A}_0$. Še več, zgornja enakost velja za vse $z \in \mathcal{A}_1$. Po (4.13) je

$$\begin{aligned} & -(-1)^{|wt|}wtz(D_1(xy) - D_1(x)y - (-1)^{|x|}xD_1(y)) \\ &= (D_1(wt) - D_1(w)t - (-1)^{|w|}wD_1(t))zxy \end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $z \in \mathcal{A}_1$. Če primerjamo zadnji dve enakosti, vidimo, da je $wtz(D_1(xy) - D_1(x)y - (-1)^{|x|}xD_1(y)) = 0$ za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $z \in \mathcal{A}_1$. Analogno lahko pokažemo, da ta enakost velja tudi za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $z \in \mathcal{A}_0$. Iz tega sledi, da je

$$wtz(D_1(xy) - D_1(x)y - (-1)^{|x|}xD_1(y)) = 0$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $z \in \mathcal{A}$. Torej je

$$D_1(xy) - D_1(x)y - (-1)^{|x|}xD_1(y) = 0$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Dokaz je končan. \square

4.2 Lokalna ϵ -odvajanja

Namen tega poglavja je predstaviti lokalna ϵ -odvajanja in posplošiti rezultate, predstavljene v prejšnjem poglavju. Ideja in motivacija za tovrstno obravnavo je povzeta po člankih [8] in [15].

V nadaljevanju bomo z \mathcal{A} označevali G -gradirano asociativno algebro. Pravimo, da je \mathcal{A} -bimodul \mathcal{M} je gradiran \mathcal{A} -bimodul, če je $\mathcal{M} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{M}_g$. Zapišimo definicijo lokalnega ϵ -odvajanja.

Definicija 4.13. Naj bo \mathcal{A} asociativna gradirana algebra in naj bo \mathcal{M} gradiran \mathcal{A} -bimodul. Nadalje, naj bo $k \in G$. Potem je Φ -linearna preslikava $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ lokalno ϵ -odvajanje stopnje k , če za vsak $x \in \mathcal{A}$ obstaja tako ϵ -odvajanje stopnje k $(D_k)_x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, da je $D_k(x) = (D_k)_x(x)$. Lokalno ϵ -odvajanje je končna vsota lokalnih ϵ -odvajanj različnih stopenj.

V nadaljevanju bomo z \mathcal{E} bomo označili množico $\mathcal{E} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{E}_g$, kjer je \mathcal{E}_1 množica vseh idempotentov v \mathcal{A}_1 ,

$$\mathcal{E}_1 = \{e \in \mathcal{A}_1 \mid e^2 = e\},$$

in za $g \neq 1 \in G$

$$\mathcal{E}_g = \{e \in \mathcal{A}_g \mid \text{obstaja tak } e' \in \mathcal{E}_1, \text{ da je } (e' + e)^2 = e' + e\}.$$

Opazimo, da iz enakosti $(e' + e)^2 = e' + e$, $e' \in \mathcal{E}_1$, $e \in \mathcal{E}_g$, sledi $e^2 = 0$ in $e'e + ee' = e$. Nadalje, z $\mathcal{R} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{R}_g$ bomo označevali gradirano podalgebro \mathcal{A} generirano z \mathcal{E} , in z $\mathcal{I} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{I}_g$ gradiran ideal, generiran z $[\mathcal{E}_1, \mathcal{A}]$.

Lema 4.14. Velja $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$.

Dokaz. Naj bo $e \in \mathcal{E}_1$ in naj bo $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Potem sta elementa $e + ex - exe$ in $e + xe - exe$ tudi v \mathcal{E} . Namreč, če je $x \in \mathcal{A}_1$, potem je očitno $e + ex - exe, e + xe - exe \in \mathcal{E}_1$. V primeru, ko je $x \in \mathcal{A}_g$, $g \in G$, je $ex - exe, xe - exe \in \mathcal{E}_g$ ($e' = e$). Ker je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$, je $(e + ex - exe) - (e + xe - exe) = [e, x] \in \mathcal{R}$. Po [8, lema 2.1] sledi želen rezultat. \square

Če torej \mathcal{A}_1 vsebuje necentralni idempotent, potem obstaja neničelni gradirani idel, ki je vsebovan v \mathcal{R} .

Zapišimo nekaj primerov, ko je $\mathcal{A} = \mathcal{R}$.

- (a) \mathcal{A} je gradirana enostavna algebra, ki vsebuje netrivialne idempotente v \mathcal{A}_1 .

Gradirana enostavna algebra \mathcal{A} (kot tudi gradirana praalgebra) ne vsebuje netrivialnih centralnih idempotentov v \mathcal{A}_1 . Če je torej \mathcal{A} gradirana algebra tipa (a), potem je $\mathcal{I} \neq 0$. Iz tega sledi po lemi 4.3, da je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$.

(b) \mathcal{A} je gradirana algebra z enoto 1, ki vsebuje tak netrivialni idempotent $e \in \mathcal{A}_1$, da sta gradirana ideala generirana z e oziroma $1 - e$ enaka \mathcal{A} .

Predpostavimo, da \mathcal{A} zadošča pogoju (b). Potem je $\sum_j x_j(1 - e)y_j = e$ za neke $x_j, y_j \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, kar pomeni, da je $e = \sum_j [e, x_j](1 - e)y_j \in \mathcal{I}$. Podobno je $\sum_j x'_j e y'_j = 1 - e$ za neke $x'_j, y'_j \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in zato je $1 - e = \sum_j [x'_j, e] e y'_j \in \mathcal{I}$. Iz tega sledi, da je $1 \in \mathcal{I}$. Torej je $\mathcal{I} = \mathcal{R} = \mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{A} = M_n(\mathcal{B})$, gradirana algebra $n \times n$ matrik nad enotsko algebro \mathcal{B} , kjer je $n \text{ Geq } 2$.

Naj bo \mathcal{A} tipa (c). Če za e izberemo matrično enoto E_{11} , potem \mathcal{A} zadošča pogoju, zapisanem v primeru (b).

V nadaljevanju naj bo $k \in G$ in $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ naj označuje Φ -linearo preslikavo. Obravnavali bomo naslednje pogoje:

$$(D_k a) \quad xy = yz = 0 \Rightarrow \sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g D_k(y) z = 0$$

$$(x = \sum_{g \in G} x_g, y, z \in \mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g),$$

$$(D_k b) \quad xy = 0 \Rightarrow D_k(x)y + \sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g D_k(y) = 0$$

$$(x = \sum_{g \in G} x_g, y \in \mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g).$$

Ni težko preveriti, da so preslikave, ki zadoščajo pogojem $(D_k b)$, poseben primer preslikav, ki zadoščajo pogojem $(D_k a)$.

Naj bo sedaj $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ ϵ -odvajanje stopnje k in

$$x = \sum_{g \in G} x_g, y \in \mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$$

taka elementa, da je $xy = 0$. Potem je

$$0 = D_k(xy) = D_k(x)y + \sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g D_k(y).$$

Če je $xy = yz = 0$, $z \in \mathcal{A}$, je

$$0 = D_k(xy)z = D_k(x)yz + \sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g D_k(y)z$$

$$= \sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g D_k(y)z.$$

Torej vsako ϵ -odvajanje stopnje k zadošča pogoju $(D_k a)$ ter $(D_k b)$. Postavi se vprašanje: ali velja obratna zveza?

Naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ lokalno ϵ -odvajanje stopnje k . Potem je

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g D_k(y) z \\ &= \sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g (D_k)_y(y) z \\ &= (D_k)_y(xy) z - (D_k)_y(x) y z \end{aligned}$$

za vse $x = \sum_{g \in G} x_g$ in $y, z \in \mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$. Če je $xy = yz = 0$, potem iz zgornje enakosti sledi, da je $\sum_{g \in G} \epsilon(k, g) x_g D_k(y) z = 0$. Pokazali smo torej, da tudi vsako lokalno ϵ -odvajanje stopnje k zadošča $(D_k a)$.

V nadaljevanju bomo zaradi boljše preglednosti uporabili oznako

$$\delta_k(x, y) = D_k(xy) - D_k(x)y - \epsilon(k, x)x D_k(y), \quad x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A}).$$

Pogoj $(D_k a)$

Naslednji izrek, ki obravnava tako Φ -linearna preslikava $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, da zadošča pogoju $(D_k a)$ in je $D_k(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{M}_{ki}$, $i \in G$ in $D_k(1) = 0$, je posplošitev izreka 4.4.

Izrek 4.15. *Naj bo \mathcal{A} gradirana algebra z enoto 1, \mathcal{M} enotski gradiran \mathcal{A} -bimodul in naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja $(D_k a)$, $D_k(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{M}_{ki}$, $i \in G$ in $D_k(1) = 0$. Potem je zožitev preslikave D_k na \mathcal{R} ϵ -odvajanje stopnje k . Velja še več,*

$$D_k(rxs) + \epsilon(k, r)r D_k(x)s = D_k(rx)s + \epsilon(k, r)r D_k(xs) \quad (4.18)$$

za vse $r, s \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in

$$\mathcal{I} \delta_k(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{H}(\mathcal{A})) \mathcal{I} = 0. \quad (4.19)$$

Dokaz. Naj bosta e in f idempotenta v \mathcal{A} in naj bo $x \in \mathcal{A}$. Ni težko preveriti, da velja

$$\begin{aligned} (1 - e) \cdot exf &= exf \cdot (1 - f) = 0, \\ e \cdot (1 - e)xf &= (1 - e)xf \cdot (1 - f) = 0, \\ (1 - e) \cdot ex(1 - f) &= ex(1 - f) \cdot f = 0, \\ e \cdot (1 - e)x(1 - f) &= (1 - e)x(1 - f) \cdot f = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Naj bo sedaj $e = e_1$ in $f = f_1 \in \mathcal{E}_1$ v (4.20). Vidimo, da je $\epsilon(k, e_1) = \epsilon(k, 1) = 1$. Po $(D_k a)$ je

$$\begin{aligned} (1 - e_1)D_k(e_1 x f_1)(1 - f_1) &= 0, \\ e_1 D_k((1 - e_1)x f_1)(1 - f_1) &= 0, \\ (1 - e_1)D_k(e_1 x(1 - f_1))f_1 &= 0, \\ e_1 D_k((1 - e_1)x(1 - f_1))f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$D_k(e_1 x f_1) + e_1 D_k(x) f_1 = D_k(e_1 x) f_1 + e_1 D_k(x f_1) \quad (4.21)$$

za vse $e_1, f_1 \in \mathcal{E}_1$ in $x \in \mathcal{A}$.

Nadalje, naj bosta $e = e_1 \in \mathcal{E}_1$ in $f = f_1 + f_g \in \mathcal{A}$, $g \in G$, idempotenta, kjer je $f_1 \in \mathcal{E}_1$ ter $f_g \in \mathcal{E}_g$. Upoštevajmo (4.20) in $(D_k a)$, iz česar sledi

$$\begin{aligned} (1 - e_1)D_k(e_1 x f)(1 - f) &= 0, \\ e_1 D_k((1 - e_1)x f)(1 - f) &= 0, \\ (1 - e_1)D_k(e_1 x(1 - f))f &= 0, \\ e_1 D_k((1 - e_1)x(1 - f))f &= 0. \end{aligned}$$

Torej je

$$D_k(e_1 x f) + e_1 D_k(x) f = D_k(e_1 x) f + e_1 D_k(x f).$$

Glede na (4.21) dobimo

$$D_k(e_1 x f_g) + e_1 D_k(x) f_g = D_k(e_1 x) f_g + e_1 D_k(x f_g) \quad (4.22)$$

za vse $e_1 \in \mathcal{E}_1$, $f_g \in \mathcal{E}_g$, $g \in G$, in $x \in \mathcal{A}$.

V nadaljevanju naj bo $f = f_1 \in \mathcal{E}_1$ in $e = e_1 + e_h \in \mathcal{A}$, $h \in G$, idempotent, kjer je $e_1 \in \mathcal{E}_1$ in $e_h \in \mathcal{E}_h$. Ponovno upoštevajmo (4.20) in $(D_k a)$. Sledi

$$\begin{aligned} (1 - e_1 - \epsilon(k, h)e_h)D_k(e x f_1)(1 - f_1) &= 0, \\ (e_1 + \epsilon(k, h)e_h)D_k((1 - e)x f_1)(1 - f_1) &= 0, \\ (1 - e_1 - \epsilon(k, h)e_h)D_k(e x(1 - f_1))f_1 &= 0, \\ (e_1 + \epsilon(k, h)e_h)D_k((1 - e)x(1 - f_1))f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Po (4.21) je

$$D_k(e_h x f_1) + \epsilon(k, h)e_h D_k(x) f_1 = D_k(e_h x) f_1 + \epsilon(k, h)e_h D_k(x) f_1 \quad (4.23)$$

za vse $e_h \in \mathcal{E}_h$, $h \in G$, $f_1 \in \mathcal{E}_1$ in $x \in \mathcal{A}$.

Nazadnje naj bosta $e = e_1 + e_h \in \mathcal{A}$, $h \in G$, in $f = f_1 + f_g \in \mathcal{A}$, $g \in G$, idempotenta, kjer so $e_1, f_1 \in \mathcal{E}_1$ ter $e_h \in \mathcal{E}_h$, $f_g \in \mathcal{E}_g$. S pomočjo prej opisanega postopka dobimo

$$D_k(e_h x f_g) + \epsilon(k, h)e_h D_k(x) f_g = D_k(e_h x) f_g + \epsilon(k, h)e_h D_k(x) f_g \quad (4.24)$$

za vse $e_h \in \mathcal{E}_h$, $f_g \in \mathcal{E}_g$ in $x \in \mathcal{A}$. Glede na (4.21), (4.22), (4.23) in (4.24) smo pokazali, da je

$$D_k(e x f) + \epsilon(k, e)e D_k(x) f = D_k(e x) f + \epsilon(k, e)e D_k(x) f \quad (4.25)$$

za vse $e, f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ ter $x \in \mathcal{A}$. Naj bo $x = 1$. Ker je $D_k(1) = 0$ je

$$\delta_k(e, f) = 0 \quad \text{for all } e, f \in \mathcal{H}(\mathcal{E}). \quad (4.26)$$

Pokažimo, da je zožitev preslikave D_k na \mathcal{R} ϵ -odvajanje stopnje k . Pokazati torej moramo, da je

$$\begin{aligned} & D_k(e_1 e_2 \dots e_n) \\ &= D_k(e_1) e_2 \dots e_{n-1} e_n + \epsilon(k, e_1) e_1 D_k(e_2) e_3 \dots e_{n-1} e_n + \\ & \dots + \epsilon(k, e_1 e_2 \dots e_{n-1}) e_1 e_2 \dots e_{n-1} D_k(e_n) \end{aligned} \quad (4.27)$$

za vsak $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, kjer so $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Uporabili bomo indukcije po n . Po (4.26) je zeleno pokazano za $n = 2$. Naj bo sedaj $2 < n$. Predpostavimo, da želo drži za vsako naravno število manjše od n . Po (4.25) je

$$\begin{aligned} D_k(e_1 e_2 \dots e_n) &= D_k(e_1 e_2 \dots e_{n-1}) e_n + \\ &+ \epsilon(k, e_1) e_1 D_k(e_2 \dots e_n) - \epsilon(k, e_1) e_1 D_k(e_2 \dots e_{n-1}) e_n \end{aligned}$$

za vse $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Iz tega sledi (4.27). S tem smo pokazali, da je zožitev preslikave D_k na \mathcal{R} ϵ -odvajanje stopnje k .

Za poljuben $a \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ bomo označili množici

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a &= \{r \in \mathcal{H}(\mathcal{R}) \mid D_k(r x a) + \epsilon(k, r) r D_k(x) a \\ &= D_k(r x) a + \epsilon(k, r) r D_k(x a) \text{ za vsak } x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}, \\ \mathcal{T}_a &= \{s \in \mathcal{H}(\mathcal{R}) \mid D_k(a x s) + \epsilon(k, a) a D_k(x) s \\ &= D_k(a x) s + \epsilon(k, a) a D_k(x s) \text{ za vsak } x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}. \end{aligned}$$

Naj bosta $r, r' \in \mathcal{S}_a$. Potem je

$$\begin{aligned} D_k(rr'xa) &= D_k(rr'x)a + \epsilon(k, r)rD_k(r'xa) - \epsilon(k, r)rD_k(r'x)a \\ &= D_k(rr'x)a + \epsilon(k, r)r(D_k(r'x)a + \epsilon(k, r')r'D_k(xa) \\ &\quad - \epsilon(k, r')r'D_k(x)a) - \epsilon(k, r)rD_k(r'x)a \\ &= D_k(rr'x)a + \epsilon(k, rr')rr'D_k(xa) - \epsilon(k, rr')rr'D_k(x)a \end{aligned}$$

za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Torej je $rr' \in \mathcal{S}_a$ za vsak par $r, r' \in \mathcal{S}_a$. Podobno lahko pokažemo, da je $ss' \in \mathcal{T}_a$ za vsak par $s, s' \in \mathcal{T}_a$. Po (3.47) je $\mathcal{H}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}_f$ za vsak $f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Sledi $\mathcal{H}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{S}_f$ za vsak $f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Torej je $f \in \mathcal{T}_r$ za vsak $f \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ in vsak $r \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. S tem smo pokazali (4.18).

Naj bood $u \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $s \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. Potem je $ux \in \mathcal{H}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{R})$ glede na lemo 4.3. Ker je D_k ϵ -odvajanje stopnje k na \mathcal{R} , je

$$D_k(uxs) = D_k(ux)s + \epsilon(k, ux)uxD_k(s).$$

Ker je $u, s \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, sledi iz (4.18), da je

$$D_k(uxs) = D_k(ux)s + \epsilon(k, u)uD_k(xs) - \epsilon(k, u)uD_k(x)s.$$

Če primerjamo obe identiteti, dobimo

$$u\delta_k(x, s) = 0 \tag{4.28}$$

za vse $u \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $s \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. Naj bo $y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in naj bo $v \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$. Ker je $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, sledi iz (4.28)

$$u(D_k((xy)v) - D_k(xy)v - \epsilon(k, xy)xyD_k(v)) = 0.$$

Ker je $yv, v \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$ in $ux \in \mathcal{I}$, (4.28) sledi

$$\begin{aligned} 0 &= u(D_k(x(yv)) - D_k(x)yv - \epsilon(k, x)xD_k(yv)) \\ &= u(D_k(x(yv)) - D_k(x)yv - \epsilon(k, x)x(D_k(y)v + \epsilon(k, y)yD_k(v))). \end{aligned}$$

Torej velja (4.19). S tem je dokaz izreka zaključen. \square

Glede na splošen rezultat, ki smo ga predstavili, takoj sledijo tri posledice.

Posledica 4.16. Če je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, je $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ ϵ -odvajanje stopnje k .

Posledica 4.17. Naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja $(D_k a), D_k(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}_{ki}, i \in G, D_k(1) = 0$, in naj bo \mathcal{J} gradiran ideal \mathcal{A} generiran z $\delta_k(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{H}(\mathcal{A}))$. Če je \mathcal{A} gradirana polpraalgebra, ki vsebuje netrivialni idempotent v \mathcal{A}_1 , potem je

- (i) $\mathcal{J}\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{J} = 0$,
- (ii) $e\mathcal{J}(1 - e) = (1 - e)\mathcal{J}e = 0$ za vsak $e \in \mathcal{E}_1$,
- (iii) $\mathcal{J}f = 0$ in $f\mathcal{J} = 0$ za vsak $f \in \mathcal{R}_g, g \neq 1$,
- (iv) $[\mathcal{J}, \mathcal{R}] = 0$.

Dokaz. Glede na (4.19) je $\delta_k(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{H}(\mathcal{A}))\mathcal{I}\delta_k(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{H}(\mathcal{A}))\mathcal{I} = 0$. Po predpostavki je \mathcal{A} gradirana polpraalgebra, iz česar sledi, da je $\delta_k(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{H}(\mathcal{A}))\mathcal{I} = 0$. Torej je $\mathcal{J}\mathcal{I} = 0$. Podobno lahko pokažemo, da je $\mathcal{I}\mathcal{J} = 0$.

Ker je $\mathcal{J}\mathcal{I} = 0$, je $\mathcal{J}[\mathcal{E}_1, \mathcal{A}] = 0$, iz česar sledi $[\mathcal{J}, \mathcal{E}_1]\mathcal{A}[\mathcal{J}, \mathcal{E}_1] = 0$. Glede na predpostavko sledi $[\mathcal{J}, \mathcal{E}_1] = 0$. Ker je $[e, \mathcal{J}](1 - e) = 0$ za vsak $e \in \mathcal{E}_1$, je $e\mathcal{J}(1 - e) = 0$. Opazimo, da je tudi $(1 - e)\mathcal{J}e = 0$ za vsak $e \in \mathcal{E}_1$.

Naj bo $e + f$ idempotent v \mathcal{A} , kjer je $e \in \mathcal{E}_1, f \in \mathcal{E}_g, g \in G$. Potem je $0 = ex(1 - e)f = ex(f - ef)$ za vsak $x \in \mathcal{J}$. Po drugi strani pa je $0 = exf(1 - e) = ex(f - fe)$. Ker je $fe + ef = f$, sledi $e\mathcal{J}f = 0$. Potem je tudi $fexf = 0$ in $efxf = 0$, kar privede do $f\mathcal{J}f = 0$. Posebej vlja $\mathcal{J}f\mathcal{A}\mathcal{J}f = 0$. Iz tega sledi $\mathcal{J}f = 0$ za vsak $f \in \mathcal{E}_g, 1 \neq g \in G$. Podobno lahko pokažemo, da je $f\mathcal{J} = 0$ za vsak $f \in \mathcal{E}_g, 1 \neq g \in G$, kar nas skupaj z enakostjo $[\mathcal{J}, \mathcal{E}_1] = 0$ privede do $[\mathcal{J}, \mathcal{E}] = 0$. Posledično je $[\mathcal{J}, \mathcal{R}] = 0$. S tem je dokaz zaključen. \square

Posledica 4.18. Naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, k \in G$, taka Φ -linearna preslikava, da je $D_k(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}_{ki}, i \in G, (D_k a)$ in $D_k(1) = 0$. Če je \mathcal{A} gradirana praalgebra z netrivialnim idempotentom v \mathcal{A}_1 , potem je D_k ϵ -odvajanje stopnje k .

Dokaz. Glede na posledico 4.17 je $\mathcal{J}\mathcal{I} = 0$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra in $\mathcal{I} \neq 0$, sledi, da je $\mathcal{J} = 0$. Torej je $\delta_k(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{H}(\mathcal{A})) = 0$, kar pomeni, da je D_k ϵ -odvajanje stopnje k . \square

Zapisati velja, da zaključek izreka 4.15 drži tudi za lokalna ϵ -odvajanja $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}, k \in G$, stopnje k .

Naj bo sedaj \mathcal{A} neenotska gradirana algebra in naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, $k \in G$, lokalno ϵ -odvajanje stopnje k . Potem lahko obravnavamo gradirano algebro \mathcal{A}' , ki ji dodamo enoto v \mathcal{A} . Definirajmo $1m = m = m1$ za vsak $m \in \mathcal{M}$. Potem postane \mathcal{M} enotski gradiran \mathcal{A}' -bimodul. Razširimo D_k na \mathcal{A}' z definiranjem $D_k(1) = 0$. Opazimo, da je D_k lokalno ϵ -odvajanje stopnje k na \mathcal{A}' . Potem zaključek izreka 4.15 drži za lokalna ϵ -odvajanja $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ tudi v primeru, ko sta \mathcal{A} in \mathcal{M} neenotski. Posebej velja, vsaka gradirana algebra \mathcal{A} z necentralnim idempotentom v \mathcal{A}_1 vsebuje tak neničelni gradirani ideal \mathcal{I} , da je vsako lokalno ϵ -odvajanje stopnje k , $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, $k \in G$, ϵ -odvajanje stopnje k na \mathcal{I} . To pomeni, da je vsako lokalno ϵ -odvajanje iz \mathcal{A} v \mathcal{M} ϵ -odvajanje na \mathcal{I} .

Naslednji posledici podata odgovor na zastavljeno vprašanje glede povezave med lokalnim ϵ -odvajanjem in ϵ -odvajanjem: v primeru, ko je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ ali je \mathcal{A} gradirana praalgebra z netrivialnim idempotentom v \mathcal{A}_1 , je lokalno ϵ -odvajanje ϵ -odvajanje.

Posledica 4.19. *Če je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, potem je vsako lokalno ϵ -odvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ ϵ -odvajanje.*

Dokaz. Naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, $k \in G$, lokalno ϵ -odvajanje stopnje k . Potem D_k zadošča $(D_k a)$. Glede na izrek 4.15 sledi, da je D_k ϵ -odvajanje stopnje k o \mathcal{A} . Torej je vsako lokalno ϵ -odvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ ϵ -odvajanje. \square

Posledica 4.20. *Naj bo \mathcal{A} gradirana praalgebra z netrivialnim idempotentom v \mathcal{A}_1 . Potem je vsako lokalno ϵ -odvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ϵ -odvajanje.*

Dokaz. Glede na predpostavko \mathcal{A} vsebuje neničelni gradirani ideal \mathcal{I} . Naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $k \in G$, lokalno ϵ -odvajanje stopnje k . S pomočjo izreka 4.15 sledi (4.19). Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je D_k ϵ -odvajanje stopnje k na \mathcal{A} . Posledično je vsako lokalno ϵ -odvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ϵ -odvajanje. \square

Pogoj $(D_k b)$

Hitro lahko preverimo, da iz pogoja $(D_k b)$ sledi pogoj $(D_k a)$. Tako rezultati prejšnjega dela podajo že nekaj zaključkov za preslikave, ki zadoščajo pogoju $(D_k b)$. V nadaljevanju bomo predpostavili, da

gradirane algebre in gradirani bimoduli niso enotski. Obravnavali bomo tako Φ -linearno preslikavo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, ki zadošča pogoju $(D_k b)$ in je $D_k(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{M}_{ki}$, $i \in G$.

Izrek 4.21. *Naj bo \mathcal{A} gradirana algebra, \mathcal{M} gradiran \mathcal{A} -bimodul in naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja $(D_k b)$ in $D_k(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{M}_{ki}$, $i \in G$. Potem je*

$$D_k(xr)z + \epsilon(k, xr)xrD_k(z) = D_k(x)rz + \epsilon(k, x)xD_k(rz) \quad (4.29)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, $r \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ in

$$\epsilon(k, wtz)wtz\delta_k(x, y) = \delta_k(w, t)zxy \quad (4.30)$$

za vse $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$, $x, y, z, w \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Naj bo e idempotent v \mathcal{A} in naj bo $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Potem je

$$\begin{aligned} (x - xe) \cdot ez &= 0, \\ xe \cdot (z - ez) &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Najprej predpostavimo, da je $e = e_1 \in \mathcal{E}_1$. Po $(D_k b)$ je

$$\begin{aligned} D_k(x - xe_1)e_1z + \epsilon(k, xe_1)(x - xe_1)D_k(e_1z) &= 0, \\ D_k(xe_1)(z - e_1z) + \epsilon(k, xe_1)xe_1D_k(z - e_1z) &= 0. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je

$$D_k(xe_1)z + \epsilon(k, xe_1)xe_1D_k(z) = D_k(x)e_1z + \epsilon(k, x)xD_k(e_1z) \quad (4.32)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $e_1 \in \mathcal{E}_1$.

Naj bo sedaj $e = e_1 + e_g \in \mathcal{A}$ idempotent, kjer sta $e_1 \in \mathcal{E}_1$ in $e_g \in \mathcal{E}_g$, $g \in G$. Po (4.31), $(D_k b)$ in (4.32) sledi, da je

$$D_k(xe_g)z + \epsilon(k, xe_g)xe_gD_k(z) = D_k(x)e_gz + \epsilon(k, x)xD_k(e_gz)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $e_g \in \mathcal{E}_g$, $g \in G$. S tem smo pokazali, da je

$$D_k(xe)z + \epsilon(k, xe)xeD_k(z) = D_k(x)ez + \epsilon(k, x)xD_k(ez) \quad (4.33)$$

za vse $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $e \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Naj bo

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{r \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid D_k(xr)z + \epsilon(k, xr)xrD_k(z) \\ &= D_k(x)rz + \epsilon(k, x)xD_k(rz) \text{ za vse } x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}. \end{aligned}$$

Za $r, r' \in \mathcal{T}$ in $x, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ je

$$\begin{aligned} D_k(xrrr')z &= D_k(xr)r'z + \epsilon(k, xr)xrD_k(r'z) - \epsilon(k, xrrr')xrrr'D_k(z) \\ &= D_k(x)rrr'z + \epsilon(k, x)xD_k(rrr'z) - \epsilon(k, xrrr')xrrr'D_k(z). \end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da je $rr' \in \mathcal{T}$. Ker je $\mathcal{H}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{T}$, je $\mathcal{H}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{T}$. S tem smo pokazali (4.29).

Naj bodo $u \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$ in $x, y, z, w, w', w'' \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Potem je

$$uzx, w''uz, w'w''u \in \mathcal{H}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{R})$$

po lemi 4.3. Glede na (4.29) je

$$\begin{aligned} ww'w''D_k(uzxy) &= \\ &= \epsilon(w'', k)ww'D_k(w''uzx)y + \epsilon(k, uzx)ww'w''uzxD_k(y) \\ &\quad - \epsilon(w'', k)ww'D_k(w'')uzxy = \epsilon(w'', k)w(\epsilon(w', k)D_k(w'w''uz)x \\ &\quad + \epsilon(k, w''uz)w'w''uzD_k(x) - \epsilon(w', k)D_k(w')w''uzxy) \\ &\quad + \epsilon(k, uzx)ww'w''uzxD_k(y) - \epsilon(w'', k)ww'D_k(w'')uzxy \\ &= \epsilon(w''w', k)(\epsilon(w, k)D_k(ww'w''u)z + \epsilon(k, w'w''u)ww'w''uD_k(z) \\ &\quad - \epsilon(w, k)D_k(w)w'w''uzxy + \epsilon(k, uz)ww'w''uzD_k(x)y \\ &\quad - \epsilon(w''w', k)wD_k(w')w''uzxy + \epsilon(k, uzx)ww'w''uzxD_k(y) \\ &\quad - \epsilon(w'', k)ww'D_k(w'')uzxy. \end{aligned}$$

Po drugi strani pa upoštevajmo, da je $uz, w''u \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. Torej je

$$\begin{aligned} ww'w''D_k(uzxy) &= \\ &= \epsilon(w'', k)ww'D_k(w''uz)xy + \epsilon(k, uz)ww'w''uzD_k(xy) \\ &\quad - \epsilon(w'', k)ww'D_k(w'')uzxy = \epsilon(w'', k)w(\epsilon(w', k)D_k(w'w''u)z \\ &\quad + \epsilon(k, w''u)w'w''uD_k(z) - \epsilon(w', k)D_k(w')w''uzxy) \\ &\quad + \epsilon(k, uz)ww'w''uzD_k(xy) - \epsilon(w'', k)ww'D_k(w'')uzxy. \end{aligned}$$

Primerjajmo obe identiteti in pišimo $t = w'w''u$. Sledi

$$\begin{aligned} \epsilon(k, wtz)wtz(D_k(xy) - D_k(x)y - \epsilon(k, x)xD_k(y)) \\ = (D_k(wt) - D_k(w)t - \epsilon(k, w)wD_k(t))zxy \end{aligned}$$

za vse $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$, $x, y, z, w \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. S tem je dokaz zaključen. \square

Ko je $\mathcal{A} = \mathcal{R}$, lahko (4.29) zapišemo kot

$$D_k(xy)z + \epsilon(k, xy)xyD_k(z) = D_k(x)yz + \epsilon(k, x)xD_k(y)z \quad (4.34)$$

za vse $x, y, z \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Označimo $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{H}(\mathcal{M}) \mid \epsilon(k, x)xm = mx \text{ za vsak } x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})\}$. Če je $k = 1$, potem je $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ dejansko center od \mathcal{M} . Naslednja posledica je posplošitev posledice 4.11.

Posledica 4.22. Če je $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, potem $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ zadošča enakosti (4.34). Velja še več, če \mathcal{A} in \mathcal{M} vsebujeta enoto, potem je $\lambda = D_k(1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ in obstaja tako ϵ -odvajanje $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ stopnje k , da je $D_k(x) = D_k(x) + \lambda x$ za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Naj bo $x = z = 1$. Po (4.34) je $\epsilon(k, y)yD_k(1) = D_k(1)y$ za vsak $y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Torej je $\lambda = D_k(1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Nadalje v enakost (4.34) pišimo $z = 1$. Potem je

$$D_i : x \mapsto D_k(x) - \lambda x$$

ϵ -odvajanje stopnje k . Namreč,

$$\begin{aligned} D_i(xy) &= D_k(xy) - \lambda xy \\ &= D_k(x)y + \epsilon(k, x)xD_k(y) - 2\lambda xy \\ &= D_k(x)y - \lambda xy + \epsilon(k, x)xD_k(y) - \lambda xy \\ &= D_i(x)y + \epsilon(k, x)x(D_k(y) - \lambda y) \\ &= D_i(x)y + \epsilon(k, x)xD_i(y) \end{aligned}$$

za vsak $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Dokaz je končan. \square

Posledica 4.23. Naj bo \mathcal{A} gradirana praalgebra z netrivialnim idempotentom v \mathcal{A}_1 in naj bo $D_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ taka Φ -linearna preslikava, da velja $(D_k b)$ in $D_k(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}_{ki}$, $i \in G$. Če \mathcal{A} vsebuje enoto, potem je $\lambda = D_k(1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ in $\delta_k(x, y) = -D_k(1)xy$ za vse $x, y \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Glede na predpostavke vidimo, da velja (4.30) in $\mathcal{A}^2\mathcal{I} \neq 0$. Namreč, če je $\mathcal{A}^2\mathcal{I} = 0$, potem mora biti $\mathcal{I} = 0$, saj je \mathcal{A} gradirana praalgebra. Ker pa \mathcal{A} vsebuje netrivialni centralni idempotent v \mathcal{A}_1 , sledi, da je $\mathcal{I} \neq 0$.

Naj bosta sedaj $w \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$ taka elementa, da je $wt \neq 0$. Pomnožimo enakost (4.30) na desni strani z $r \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Potem dobimo

$$\epsilon(k, wtz)wtz\delta_k(x, y)r = \delta_k(w, t)zxyr.$$

Po drugi strani pa je

$$\epsilon(k, wtz)wtz\delta_k(x, yr) = \delta_k(w, t)zxyr.$$

Če primerjamo dobljeni enakosti, sledi

$$\epsilon(k, wtz)wtz(\delta_k(x, y)r - \delta_k(x, yr)) = 0$$

za vse $z, x, y, r \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra in je $wt \neq 0$, velja

$$\delta_k(x, y)r = \delta_k(x, yr)$$

za vse $x, y, r \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Torej je

$$D_k(xyr) = D_k(xy)r - \epsilon(k, x)x(D_k(y)r - d(yr))$$

za vse $x, y, r \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Vstavimo $y = 1$ v identiteto in dobimo

$$\delta_k(x, r) = -\epsilon(k, x)xD_k(1)r$$

za vsaka $x, r \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Torej lahko (4.30) zapišemo kot

$$\epsilon(k, tzx)wtzxd(1)y = wd(1)tzxy$$

za vse $x, y, z, w \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$. Ponovno upoštevajmo, da je \mathcal{A} gradirana praalgebra. Torej je

$$\epsilon(k, tzx)tzxD_k(1) = D_k(1)tzx$$

za vse $x, z, w \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$. Naj bo $x = z = 1$. Potem je

$$\epsilon(k, t)tD_k(1) = D_k(1)t$$

za vsak $t \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^2\mathcal{I})$. Posebej velja

$$\epsilon(k, xya)xyaD_k(1) = D_k(1)xya$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $a \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$. Če je $x = y = 1$, je

$$\epsilon(k, a)aD_k(1) = D_k(1)a$$

za vsak $a \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$. Opazimo, da je

$$\epsilon(k, a)aD_k(1)x = D_k(1)ax$$

za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Po drugi strani pa je

$$\epsilon(k, ax)axD_k(1) = D_k(1)ax$$

za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Če primerjajmo obe identiteti, vidimo, da je

$$\epsilon(k, a)a(D_k(1)x - \epsilon(k, x)xD_k(1)) = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $a \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$. Torej je

$$a\mathcal{A}(D_k(1)x - \epsilon(k, x)xD_k(1)) = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ in $a \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$. Ker je \mathcal{A} gradirana praalgebra, je

$$\epsilon(k, x)xD_k(1) = D_k(1)x$$

za vsak $x \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Torej je $D_k(1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. S tem je dokaz zaključen. \square

5 2-lokalna superodvajanja na superalgebri $M_n(\mathbb{C})$

V tem poglavju se bomo posvetili 2-lokalnim superodvajanjem. Podali bomo nekaj osnovnih definicij in primerov ter pokazali, da je vsako 2-lokalno superodvajanje na asociativni superalgebri $M_n(\mathbb{C})$ superodvajanje.

Za začetek ponovimo nekaj osnovnih definicij. Naj bo torej \mathcal{A} asociativna algebra nad poljem Φ . V nadaljevanju bomo s simbolom δ označevali lokalno odvajanje. Spomnimo, da je preslikava $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ lokalno odvajanje, če za vsak element $a \in \mathcal{A}$ obstaja tako odvajanje $\delta_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, da velja $\delta(a) = \delta_a(a)$. Pri tem je potrebno poudariti, da je odvajanje δ_a odvisno od elementa a . Če sta torej a_1 in a_2 dva različna elementa iz algebre \mathcal{A} , potem sta odvajanja δ_{a_1} in δ_{a_2} lahko različni, ni pa nujno. Podobno definiramo tudi lokalne avtomorfizme. Torej, preslikava $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se imenuje lokalni avtomorfizem, če za vsak element $a \in \mathcal{A}$ obstaja tak avtomorfizem $\phi_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, da velja $\phi(a) = \phi_a(a)$.

Lokalna odvajanja in lokalni avtomorfizmi so bili prvič predstavljeni v Kadisonovem članku [38] ter v članku, ki sta ga napisala Larson in Sourour [41]. Pri tem so avtorji predpostavljali, da so opisane preslikave tudi linearne. V članku [41] sta Larson in Sourour dokazala, da je vsako lokalno odvajanje na $\mathcal{B}(X)$ odvajanje, kjer $\mathcal{B}(X)$ označuje algebro vseh omejenih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru X . Če je X neskončno dimenzionalen prostor, potem je vsak surjektiven lokalni avtomorfizem na $\mathcal{B}(X)$ avtomorfizem [41]. Pri tem velja enak rezultat brez predpostavke o surjektivnosti za separabilne Hilbertove prostore X , kar sta dokazala Brešar in Šemrl [11, 12].

Še enkrat poudarimo, da zgornji rezultati veljajo samo v primeru, ko so lokalne preslikave linearne. Naj bo sedaj \mathcal{A} Banachova algebra z enoto I in $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ preslikava (ne nujno linearna), za katero velja, da je $f(I) = 1$. Predpostavimo, da za vsak par $a, b \in \mathcal{A}$

obstaja tak multiplikativen linearen funkcional $f_{a,b}$ na \mathcal{A} , da je $f(a) = f_{a,b}(a)$ in $f(b) = f_{a,b}(b)$. Potem je preslikava f linearna in multiplikativna, kar sta dokazala Kowalski in Slodkowski [39]. Prav ta rezultat pa je bil povod za naslednji dve definiciji, ki ju je prvič predstavil Šemrl [53].

Definicija 5.1. Preslikava $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se imenuje 2-lokalno odvajanje, če za vsak par $a, b \in \mathcal{A}$ obstaja tako odvajanje $\delta_{a,b} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, da velja $\delta(a) = \delta_{a,b}(a)$ in $\delta(b) = \delta_{a,b}(b)$.

Definicija 5.2. Preslikava $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se imenuje 2-lokalni avtomorfizem, če za vsak par $a, b \in \mathcal{A}$ obstaja tak avtomorfizem $\phi_{a,b} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, da velja $\phi(a) = \phi_{a,b}(a)$ in $\phi(b) = \phi_{a,b}(b)$.

Pri obeh definicijah je potrebno poudariti, da ne predpostavljamo linearnosti preslikav. Podobno kot pri lokalnih odvajanjih (oz. lokalnih avtomorfizmih) je odvajanje (oz. avtomorfizem) $\delta_{a,b}$ odvisen od para (a, b) . Za dva različna para (a_1, b_1) in (a_2, b_2) sta lahko odvajanja (oz. avtomorfizma) δ_{a_1, b_1} in δ_{a_2, b_2} različna, ni pa nujno.

Če je H separabilen Hilbertov prostor, potem je vsako 2-lokalno odvajanje na $\mathcal{B}(H)$ odvajanje. Podobno, vsak 2-lokalni avtomorfizem na $\mathcal{B}(H)$ je avtomatično avtomorfizem. Za neskončno dimenzionalne prostore H je ta dva rezultata dokazal Šemrl [53]. V nadaljevanju bomo dokazali, da podobna rezultata veljata tudi v primeru superalgeber.

Naj bo sedaj \mathcal{A} asociativna superalgebra in $i = 0$ ali $i = 1$. Zapišimo najprej definiciji 2-lokalnih superodvajanj in 2-lokalnih avtomorfizmov.

Definicija 5.3. Preslikava $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se imenuje 2-lokalno superodvajanje stopnje i , če za vsak par elementov $a, b \in \mathcal{A}$ obstaja tako superodvajanje $\delta_{a,b} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ stopnje i , da velja $\delta(a) = \delta_{a,b}(a)$ in $\delta(b) = \delta_{a,b}(b)$.

Definicija 5.4. Preslikava $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se imenuje 2-lokalni avtomorfizem stopnje i , če za vsak par elementov $a, b \in \mathcal{A}$ obstaja tak avtomorfizem $\phi_{a,b} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ stopnje i , da velja $\phi(a) = \phi_{a,b}(a)$ in $\phi(b) = \phi_{a,b}(b)$.

Podobno kot zgoraj je preslikava $\delta_{a,b}$ odvisna od elementov a in b . Omenimo še, da je vsak 2-lokalni superavtomorfizem na asociativni superalgebri \mathcal{A} pravzaprav 2-lokalni avtomorfizem na algebri

\mathcal{A} . Torej je tudi vsak 2-lokalni superavtomorfizem na $\mathcal{B}(H)$ avtomatično superavtomorfizem. Tukaj seveda H označuje končno ali neskončno dimenzionalen separabilen Hilbertov prostor.

5.1 2-lokalna superodvajanja na $M_n(\mathbb{C})$

Kot dosedaj naj $M_n(\mathbb{C})$ označuje algebro vseh $n \times n$ matrik nad poljem kompleksnih števil. Znano je, da je vsako odvajanje δ na $M_n(\mathbb{C})$ notranje. To pomeni, da obstaja taka fiksna kompleksna matrika T , da je $\delta(A) = [T, A]$ za vsak $A \in M_n(\mathbb{C})$. Naslednji izrek bo pokazal, da enako velja za superalgebro $M_n(\mathbb{C})$.

Izrek 5.5. *Naj bo δ superodvajanje stopnje 1 na superalgebri $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$. Potem obstaja tak $T \in \mathcal{A}_1$, da je $\delta(A) = [T, A]_s$ za vse $A \in \mathcal{A}$.*

V dokazu bomo z E_{ij} označevali matrike, ki imajo na mestu (i, j) enico, vsepovsod drugod pa ničle.

Dokaz. Naj bo $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ superodvajanje stopnje 1 in naj bo $\mathcal{D} \subset M_n(\mathbb{C})$ superalgebra, generirana z matrikami $\{E_{ii}\}_{i=1}^n$. Množica \mathcal{D} je Abelova von Neumannova algebra in $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}_0$. Torej je omejitvev preslikave δ na algebro \mathcal{D} odvajanje iz \mathcal{D} v \mathcal{A} . Iz tega sledi [14, Lemma 10.7], da obstaja tak $T \in \mathcal{A}$, da je $\delta(D) = [T, D]$ za vse $D \in \mathcal{D}$. Če zapišemo $T = T_0 + T_1$, kjer je $T_0 \in \mathcal{A}_0$ in $T_1 \in \mathcal{A}_1$, potem je $\delta(D) = [T_0 + T_1, D] = [T_0, D] + [T_1, D]$. Glede na predpostavko, da je $\delta(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_1$, je $\delta(D) \in \mathcal{A}_1$ za vse $D \in \mathcal{D}$. Torej je $[T_0, D] = 0$ za vse $D \in \mathcal{D}$.

Naj bo sedaj $\bar{\delta} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ preslikava, definirana s predpisom

$$\bar{\delta}(A) = \delta(A) - [T_1, A]_s, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Ni težko videti, da je $\bar{\delta}$ superodvajanje stopnje 1. Poleg tega je $\bar{\delta}(D) = 0$ za vse $D \in \mathcal{D}$. Torej je tudi $\bar{\delta}(E_{ii}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. V nadaljevanju bom pokazali, da je $\bar{\delta}(A) = 0$ za vse elemente $A \in \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

Naj bosta i, j različni naravni števili. Potem je

$$\bar{\delta}(E_{ij}) = \bar{\delta}(E_{ii}E_{ij}E_{jj}) = E_{ii}\bar{\delta}(E_{ij})E_{jj} = \lambda E_{ij} \quad (5.1)$$

za neko kompleksno število λ . Poleg tega že vemo, da je $\bar{\delta}(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_1$, $\bar{\delta}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_0$ in $E_{ij} \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Iz vsega tega sledi, da je $\bar{\delta}(E_{ij}) = 0$ za vse $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Naj bo sedaj $A = [a_{ij}] \in \mathcal{A}$ poljubna kompleksna matrika. Potem lahko zapišemo

$$A = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} a_{ij} E_{ij}.$$

Ker je $\bar{\delta}$ linearna preslikava, je

$$\bar{\delta}(A) = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} a_{ij} \bar{\delta}(E_{ij}) = 0.$$

S tem je dokaz končan. □

Zapišimo še posledico zgornjega rezultata.

Posledica 5.6. *Naj bo δ superodvajanje na superalgebri*

$$\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C}).$$

Potem obstaja tak $T = T_0 + T_1 \in \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, da je $\delta(A) = [T, A]_s$ za vsak $A \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Vsako superodvajanje $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ lahko zapišemo kot $\delta = \delta_0 + \delta_1$, kjer je δ_0 superodvajanje stopnje 0 in δ_1 superodvajanje stopnje 1. Prav tako vemo, da je δ_0 pravzaprav odvajanje na $M_n(\mathbb{C})$, za katero velja $\delta_0(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$ in $\delta_0(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$. Torej obstaja tak $T_0 \in \mathcal{A}_0$, da je $\delta_0(A) = [T_0, A]$ za vsak $A \in \mathcal{A}$. Prav tako po zgornjem izreku obstaja tak $T_1 \in \mathcal{A}_1$, da je $\delta_1(A) = [T_1, A]_s$ za vsak $A \in \mathcal{A}$. Torej obstaja taka matrika $T = T_0 + T_1 \in \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, da je $\delta(A) = [T, A]_s$ za vsak $A \in \mathcal{A}$. □

Izrek 5.7. *Naj bo $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ superalgebra. Potem je vsako 2-lokalno superodvajanje stopnje 1 na \mathcal{A} superodvajanje stopnje 1.*

Dokaz. Naj bo $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 2-lokalno superodvajanje stopnje 1. Označimo

$$N = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} E_{ii} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $\delta(N) = 0$. Pri tem preslikavo δ zamenjamo s preslikavo $\delta - \delta_{N,I}$, če je seveda to

potrebno (tukaj $\delta_{N,I}$ označuje superodvajanje na superalgebri \mathcal{A} stopnje 1, odvisno od matrike N in identične matrike I). Po izreku 5.5 za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{C})$ obstaja taka matrika $T \in \mathcal{A}_1$, da je

$$\delta(A) = \delta_{N,A}(A) = [T, A]_s.$$

Pri tem je seveda matrika T odvisna od N in A . Poleg tega velja

$$\delta(N) = \delta_{N,A}(N) = [T, N] = 0.$$

Iz tega sledi, da je

$$T = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}$$

za neka kompleksna števila λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Torej je $T \in \mathcal{A}_0$. Ker je $T \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1$, je $T = 0$ in $\delta(A) = 0$ za vse matrike $A \in \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$. S tem je dokaz izreka končan. \square

Vemo že, da je vsako 2-lokalno superodvajanje δ_0 na superalgebri $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ stopnje 0 pravzaprav 2-lokalno odvajanje na $M_n(\mathbb{C})$. Prav tako velja $\delta_0(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$ in $\delta_0(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$. Iz tega sledi, da je vsako 2-lokalno superodvajanje na $M_n(\mathbb{C})$ stopnje 0 avtomatično superodvajanje stopnje 0. Če upoštevamo še zgornji izrek in dejstvo, da lahko vsako 2-lokalno superodvajanje $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ zapišemo kot $\delta = \delta_0 + \delta_1$, kjer je δ_0 2-lokalno superodvajanje na \mathcal{A} stopnje 0 in δ_1 2-lokalno superodvajanje na \mathcal{A} stopnje 1, potem velja naslednja posledica.

Posledica 5.8. *Vsako 2-lokalno superodvajanje na superalgebri $M_n(\mathbb{C})$ je superodvajanje.*

Literatura

- [1] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, Jordan superhomomorphisms, *Comm. Algebra* **31** (2003), 633–644.
- [2] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3rd, A. V. Mikhalev, *Rings with generalized identities*, Marcel Dekker Inc., New York (1996).
- [3] J. Bergen, P. Grzeszczuk, Simple Jordan color algebras arising from associative graded algebras, *J. Algebra* **246** (2001), 915–950.
- [4] M. Brešar, Jordan derivations on semiprime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **104** (1988), 1003–1006.
- [5] M. Brešar, Jordan mappings of semiprime rings, *J. Algebra* **127** (1989), 218–228.
- [6] M. Brešar, Characterizations of derivations on some normed algebras with involution, *J. Algebra* **152** (1992), 454–462.
- [7] M. Brešar, Centralizing mappings and derivations in prime rings, *J. Algebra* **156** (1993), 385–394.
- [8] M. Brešar, Characterizing homomorphisms, derivations, and multipliers in rings with idempotents, *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.* **137** (2007), 9–21.
- [9] M. Brešar, A. Fošner, M. Fošner, Jordan ideals revisited, *Monatsh. Math.*, **145** (2005), 1–10.
- [10] M. Brešar, W. S. Martindale 3rd, C. R. Miers, Centralizing maps in prime rings with involution, *J. Algebra* **161** (1993), 342–357.
- [11] M. Brešar, P. Šemrl, Mappings which preserve idempotents, local automorphisms, and local derivations, *Canad. J. Math.* **45** (1993), 483–496.
- [12] M. Brešar, P. Šemrl, On local automorphisms and mappings that preserve idempotents, *Studia Math.* **113** (1995), 101–108.
- [13] R. L. Crist, Local derivations on operator algebras, *J. Funct. Anal.* **135** (1996), 76–92.
- [14] K. Davidson, *Nest Algebras*, Longman Scientific and Technical, London (1988).

- [15] A. Fošner, M. Fošner, On superderivations and local superderivations, *Taiwan. j. math.* **11** (2007), 1383–1396.
- [16] A. Fošner, M. Fošner, 2-local superderivations on a superalgebra $M_n(\mathbb{C})$, *Monatsh. Math.* **156** (2009), 307–311.
- [17] A. Fošner, M. Fošner, On ϵ -derivations and local ϵ -derivations, *Acta math. Sin., Engl. ser.* **26** (2010), 1555–1566.
- [18] M. Fošner, Jordan superderivations, *Comm. Algebra* **31** (2003), 4533–4545.
- [19] M. Fošner, On the extended centroid of prime associative superalgebras with applications to superderivations, *Comm. Algebra* **32** (2004) 689–705.
- [20] M. Fošner, Jordan superderivations, II, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **2004** (2004), 2357–2369.
- [21] M. Fošner, *Asociativne superalgebre in jordanske strukture*, doktorska disertacija, Maribor (2004).
- [22] M. Fošner, Jordan ϵ -homomorphisms and Jordan ϵ -derivations, *Taiwanese J. Math.*, **9** (2005), 595–616.
- [23] C. Gómez-Ambrosi, On the simplicity of Hermitian superalgebras, *Nova J. Algebra Geom.* **3** (1995), 193–198.
- [24] C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena, I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a prime superalgebra with superinvolution, *Comm. Algebra* **2** (2000), 3277–3291.
- [25] C. Gómez-Ambrosi, F. Montaner, On Herstein’s constructions relating Jordan and associative superalgebras, *Comm. Algebra* **28** (2000), 3743–3762.
- [26] C. Gómez-Ambrosi, I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with superinvolution, *J. Algebra* **208** (1998), 43–71.
- [27] D. Hadwin, J. Li, Local derivations and local automorphisms, *J. Math. Anal. Appl.* **290** (2004), 702–714.
- [28] D. G. Han, S. Y. Wei, Local derivations of nest algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3095–3100.
- [29] I. N. Herstein, On the Lie and Jordan rings of a simple, associative ring, *Amer. J. Math.* **77** (1955), 279–285.
- [30] I. N. Herstein, Lie and Jordan systems in simple rings with involution, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 629–649.

- [31] I. N. Herstein, Jordan derivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 1104–1110.
- [32] I. N. Herstein, *Topics in ring theory*, The University of Chicago Press, Chicago (1969).
- [33] I. N. Herstein, On the Lie structure of an associative ring, *J. Algebra* **14** (1970), 561–571.
- [34] I. N. Herstein, *Rings with involution*, The University of Chicago Press, Chicago (1976).
- [35] N. Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc., Providence Rhode Island (1968).
- [36] B. E. Johnson, Local derivations on C^* -algebras are derivations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 313–325.
- [37] V. G. Kac, Classification of simple \mathbb{Z} -graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. Algebra* **13** (1977), 1375–1400.
- [38] R. V. Kadison, Local derivations, *J. Algebra* **130** (1990), 494–509.
- [39] S. Kowalski, Z. Słodkowski, A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras, *Studia Math.* **67** (1980), 215–223.
- [40] C. Lanski, S. Montgomery, Lie structure of prime rings of characteristic 2, *Pacific J. Math.* **42** (1972), 117–136.
- [41] D. Larson, A. R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of $\mathcal{B}(X)$, *Proc. Symp. Pure Math.* **51** (1990), 187–194.
- [42] W. S. Martindale 3rd, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra* **12** (1969), 576–584.
- [43] K. McCrimmon, On Herstein’s theorems relating Jordan and associative algebras, *J. Algebra* **13** (1969), 382–392.
- [44] L. Molnár, Locally inner derivations of standard operator algebras, *Math. Bohem.* **121** (1996), 1–7.
- [45] F. Montaner, On the Lie structure of associative superalgebras, *Comm. Algebra* **26** (1998), 2337–2349.
- [46] S. Montgomery, Constructing simple Lie superalgebras from associative graded algebras, *J. Algebra* **195** (1997), 558–579.
- [47] A. Nowicki, I. Nowosad, Local derivations for quotient and factor algebras of polynomials, *Colloq. Math.* **97** (2003), 107–16.
- [48] E. Posner, Derivations in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 79–92.

- [49] E. Scholz, W. Timmermann, Local derivations, automorphisms and commutativity preserving maps on $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **29** (1993), 977–995.
- [50] J. Schweizer, An analogue of Peetre's theorem in non-commutative topology, *Quart. J. Math.* **52** (2001), 499–506.
- [51] V. S. Shulman, Operators preserving ideals in C^* -algebras, *Studia. Math.* **109** (1994), 67–72.
- [52] M. F. Smiley, Jordan homomorphisms onto prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **84** (1957), 426–429.
- [53] P. Šemrl, Local automorphisms and derivations on $\mathcal{B}(H)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 2677–2680.
- [54] M. Wiehl, Local derivations on Weyl algebras with one pair of generators, *Acta Math. Hungar.* **92** (2001), 51–59.
- [55] B. Zalar, O oktonionih, *Obz. mat. fiz.* **39** (1992), 79–84.
- [56] E. I. Zelmanov, On prime Jordan algebras II, *Siberian Math. J.* **24** (1983), 89–104.
- [57] K. Zhao, Simple Lie color algebras from graded associative algebras, *J. Algebra* **296** (2003), 439–455.
- [58] K. A. Zhevlakov, A. M. Slinko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York (1982).
- [59] J. Zhu, Local derivation of nest algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 739–742.

an



ISBN 978-961-266-062-8
Univerza na Primorskem
Fakulteta za management Koper
www.fm-kp.si

€ 18,00

